ŒUVRES COMPLÈTES

DE

THOMAS JAN STIELTJES

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE D'AMSTERDAM

TOME I

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

HOMAS JAN STIEL

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE D'AMSTERDAM

TOME I

PRÉFACE.

Dans sa réunion du 30 avril 1910, la Société mathématique d'Amsterdan prit la résolution de publier une édition complète des Oeuvres scientifiques d membre défunt le docteur ès sciences Thomas Jan Stieltjes. Après la belle pu blication de la Correspondance d'Hermite et de Stieltjes par M.M. B. Baillau et H. Bourget, la Société tenait à témoigner, elle aussi, de sa haute admiratio pour l'oeuvre de l'éminent géomètre qui, nous ne saurions l'oublier, avan de devenir Français, avait été notre compatriote.

L'exécution de ce projet fut confiée à une commission composée d M.M. W. Kapteyn, J. C. Kluyver et E. F. van de Sande Bakhuyzen, qu acceptèrent cette tâche avec empressement. Après avoir été autorisée pa les rédactions des différents journaux à réimprimer les notes et mémoires e question, la commission demanda à M[me] Stieltjes la permission de consulte es papiers laissés par son époux, afin de pouvoir examiner s'il s'y trouvai encore quelque travail dans un état assez avancé pour en permettre la pu blication. M[me] Stieltjes ayant gracieusement acquiescé à cette demande, l commission a pu ajouter quelques petites notes au second volume de cett collection.

Les notes et mémoires avaient été publiés en diverses langues: dix e hollandais, deux en allemand, tous les autres en français. La commissio décida de les réimprimer tous tels qu'ils étaient, en ajoutant une traductio française aux articles hollandais.

dont les N° 15 et 34 sont des traductions françaises des N
tivement. La suppression pure et simple de ces deux trad
lieu à un changement de numérotage. Pour conserver au
possible les mêmes numéros, nous avons substitué au N
article tiré de la Zeitschrift für Vermessungswesen (Stuttgart, 1
Cet article fut envoyé de Paris au rédacteur de ce journal
mais la commission est en possession d'une lettre qui se
du second volume et dont on peut tirer presqu'avec certi
que cet inconnu était Stieltjes. Cette substitution permet
numéros de la Notice jusqu'au N° 37. Mais à partir de l
l'édition présente sont devenus inférieurs d'une unité aux
En outre quelques notes seront ajoutées à la fin du sec
indiquera quelles sont les lettres de la Correspondance qui
différents articles, on y insérera les notes qui se trouvent
M. Cosserat et enfin la commission ajoutera encore elle-mê
et éclaircissements.

La commission n'a pas jugé opportun de joindre aux
une notice biographique. Elle n'aurait pu que redire ce
et si bien dit dans la „Notice sur Stieltjes" que M. Bo
Correspondance; elle y a seulement joint un portrait dat
années de Stieltjes.

LA

TABLE DES MATIÈRES.

I.

(Afzonderlijk gedrukt te Delft in 1876)

Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere.

Is de functie $f(x)$ continu voor alle waarden van x tusschen a en b en zoo ook $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, dan kan men de vraag stellen de constanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zóó te bepalen, dat de functie $\varphi(x)$ voor $a < x < b$ zoo weinig mogelijk van $f(x)$ verschilt.

Het ligt voor de hand de constanten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ te bepalen door de voorwaarden, dat voor

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1, \\ x = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x = x_n \end{array}\right\} (a < x_1 < x_2 \ldots < x_n < b).$$

de functie $\varphi(x)$ dezelfde waarden aanneemt als $f(x)$, zoodat men heeft

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x_p) = \varphi(x_p, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

Door $\varphi(x)$ in plaats van $f(x)$ te nemen, maakt men eene fout

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{R}(x) = f(x) - \varphi(x),$$

eene continue functie van x, die nul wordt voor

Denkt men zich de lijn

$$y = \mathrm{R}(x) = f(x) - \varphi(x)$$

geconstrueerd, dan snijdt deze dus de X-as in

$$x = x_1,$$
$$x = x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x = x_n,$$
$$y = 0.$$

Eene goede overeenstemming van de functies f
geduid door eene geringe afwijking van de X-as
nu het aantal n der grootheden $x_1, x_2, \ldots, x_n$
eene betere overeenstemming van $\varphi(x)$ met $f($
maar ook bij eene vast aangenomen waarde voo
van benadering, die men bereiken zal, af van d
$x_1, x_2, \ldots, x_n$. Hoe deze het best genomen word
worden.

Het is hiertoe noodig te bepalen, wat men v
klein mogelijke afwijking der beide functies.
die afwijking genomen worden de som van all
door de X-as, de lijn $y = \mathrm{R}(x)$ en de beide gren
en voor $x = b$; al deze inhouden namelijk
genomen. Noemt men deze som

$$(b - a)\,\mathrm{M},$$

dan is M het rekenkunstige midden van alle
genomen waarden der fout tusschen $x = a$ en x
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ zullen nu zoo bepaald moeten word
wordt.

In de onderstelling, dat nu $\mathrm{R}(x)$ telkens v
wanneer x een der waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oversc
geen andere waarden van x tusschen a en b nul w

M is dus hier afhankelijk van $x_1, x_2, \ldots, x_n$, evenals de grootheden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dit zijn ten gevolge van de vergelijkingen (1).

Maar men kan ook $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als de onafhankelijk veranderlijken aannemen; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zijn dan de wortels van de vergelijking

$$f(x) = \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

en kunnen als afhankelijk van $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beschouwd worden. De condities voor een minimum van M zijn dan

$$\frac{\partial M}{\partial a_1} = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial a_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial M}{\partial a_n} = 0,$$

of daar $R(x)$ telkens aan de veranderlijke grenzen der integralen nul wordt

$$0 = \int_a^{x_1} \frac{\partial R(x)}{\partial a_p}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial R(x)}{\partial a_p}\, dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \frac{\partial R(x)}{\partial a_p}\, dx,$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

of wel, daar volgens (2)

$$-\frac{\partial R}{\partial a_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_p}$$

is,

$$(3) \quad . \quad . \quad 0 = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p}\, dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p} dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p}\, dx.$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

In (1) en (3) heeft men nu te zamen $2n$ vergelijkingen ter bepaling van $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

want dan is

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p} = \varphi_p(x)$$

en de vergelijkingen (3) worden

$$(4) \quad . \quad . \quad 0 = \int_a^{x_1} \varphi_p(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \varphi_p(x)\,dx + \ldots + (-1$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

waarin nu alleen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voorkomen. Men grootheden bepalen; ze hangen niet af van $f(x)$. Zijn bekend, dan heeft men ter bepaling van $a_1, a_2, \ldots$ kingen (1) op te lossen, die nu lineair worden, en

$$f(x_p) = a_1\varphi_1(x_p) + a_2\varphi_2(x_p) + \ldots +$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

De uitdrukking voor M wordt eenvoudiger in plaats van

$$(b-a)\,\mathrm{M} = \int_a^{x_1} \{f(x) - a_1\varphi_1(x) - \ldots a_n\varphi_n(x)\}\,dx - \ldots$$

$$\pm \int_{x_n}^{b} \{f(x) - a_1\varphi_1(x)$$

mag men volgens (4) schrijven

$$(b-a)\,\mathrm{M} = \int_a^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + (-$$

Het eenvoudigste bijzondere geval is nu hier

$$\varphi_1(x) = 1,$$
$$\varphi_2(x) = x,$$
$$\varphi_3(x) = x^2,$$

De vergelijkingen (4) ter bepaling van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ worden nu

$$(5)\quad 0 = \int_{-1}^{x_1} x^{p-1}\,dx - \int_{x_1}^{x_2} x^{p-1}\,dx + \ldots + (-1)^{n-1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} x^{p-1}\,dx + (-1)^n \int_{x_n}^{1} x^{p-1}\,dx$$

of

$$0 = 2x_1^p - 2x_2^p + \ldots + (-1)^{n-1}\,2x_n^p + (-1)^{p+1} + (-1)^n.$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

Deze vergelijkingen kunnen algemeen opgelost worden; dit schijn chter langere berekeningen te vorderen dan hier op hare plaats zouden zijn; ik zal daarom alleen laten zien, dat de waarden

$$(6)\quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x_1 = \cos\dfrac{n\pi}{n+1}, \\ x_2 = \cos\dfrac{(n-1)\pi}{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p = \cos\dfrac{(n-p+1)\pi}{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \cos\dfrac{\pi}{n+1} \end{array}\right.$$

werkelijk aan de vergelijkingen (5) voldoen.

Vermenigvuldig namelijk die vergelijkingen met willekeurige constanten en tel alles op, dan volgt

$$0 = \int_{-1}^{x_1} \psi(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} \psi(x)\,dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{1} \psi(x)\,dx,$$

waarin $\psi(x)$ eene willekeurige geheele rationale functie van x van den $n-1^{\text{sten}}$ graad hoogstens, voorstelt. Stelt men verder

$$x = \cos u$$

en tegelijk

$$x_1 = \cos u_n,$$
$$x_2 = \cos u_{n-1},$$

dan wordt

$$0=\int_0^{u_1}\psi(\cos u)\sin u\,du-\int_{u_1}^{u_2}\psi(\cos u)\sin u\,du+\ldots+(-1$$

Nu is

$$\frac{\sin pu}{\sin u}=2^{p-1}\cos^{p-1}u-\ldots\ldots$$

eene geheele rationale functie van cos u van den p
mag dus stellen

$$\psi(\cos u)=\frac{\sin pu}{\sin u}$$

$$(p=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

en vindt zoo

$$(7)\quad .\quad .\quad 0=\int_0^{u_1}\sin pu\,du-\int_{u_1}^{u_2}\sin pu\,du+\ldots+(-1)^{n}$$

$$(p=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

of

$$0=2\cos pu_1-2\cos pu_2+\ldots+(-1)^{n-1}\,2\cos pu_n$$

$$(p=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

Dat nu hieraan voldaan wordt door de waarde

$$u_1=\frac{\pi}{n+1}=a,$$

$$u_2=\frac{2\pi}{n+1}=2a,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n=\frac{n\pi}{n+1}=na$$

blijkt gemakkelijk, want stelt men

$$\mathrm{P}=2\cos pa-2\cos 2pa+2\cos 3pa-\ldots+(-1$$

dan volgt

Nu is

$$\sin(n+1)pa = \sin p\pi = 0$$

en

$$\sin npa = \sin(p\pi - pa) = (-1)^{p-1} \sin pa,$$

dus volgt, daar $\sin pa$ niet nul kan zijn,

$$P = 1 + (-1)^{n+p-1}.$$

Voor $n = 1$ kan dadelijk geverifieerd worden, dat $u_1 = \frac{\pi}{2}$ aan (7) voldoet. Hiermeê is dus de juistheid der in (6) gegeven waarden aangetoond. Er blijft nog over iets van de waarde van M te zeggen; ze is bepaald door

$$2M = \int_{-1}^{x_1} f(x)\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{1} f(x)\,dx.$$

Kan nu $f(x)$ voor alle waarden van x tusschen -1 en $+1$ ontwikkeld worden in eene reeks

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \sum_{p=0}^{p=\infty} b_p x^p,$$

dan vallen bij de substitutie hiervan in de uitdrukking van 2M de *n* eerste termen weg, en er blijft

$$2M = \int_{-1}^{x_1} \sum_{p=0}^{p=\infty} b_{n+p} x^{n+p}\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{1} \sum_{p=0}^{p=\infty} b_{n+p} x^{n+p}\,dx.$$

Neemt men nu hiervan alleen den eersten term om eene benaderde waarde S van M te vinden, dan is

$$2S = b_n \left\{ \int_{-1}^{x_1} x^n\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{1} x^n\,dx \right\},$$

of ook

$$2S = (-1)^n b_n \left\{ \int_0^{u_1} [\cos^n u + \psi(\cos u)] \sin u \, du - \ldots \right.$$

$$+ (-1)^n \int_{u_n}^{\pi} [\cos^n u +$$

Men mag nu voor $\cos^n u + \psi(\cos u)$ nemen

$$\frac{\sin(n+1)u}{2^n \sin u} = \cos^n u - \ldots$$

en dan wordt na uitvoering der integratie

$$2S = \frac{(-1)^n b_n}{2^n(n+1)} \left\{ -2\cos(n+1)u_1 + 2\cos(n+1)u_2 - \right.$$

$$+ (-1)^n 2$$

dus daar

$$(n+1)u_p = p\pi,$$

is

$$(8) \quad \ldots \ldots \ldots \quad S = \frac{(-1)^n b_n}{2^n}.$$

Om een enkel voorbeeld te geven: laat gevraa voor $0 < y < 1$ benaderend door eene uitdrukking va voor te stellen.

Men neme hier eerst:

$$\sqrt{1 + \frac{1+x}{2}} = a_1 + a_2 x.$$

$$(-1 < x < +1)$$

dan is $n = 2$,

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2},$$

$$x_2 = \cos\frac{\pi}{3} = +\tfrac{1}{2},$$

dus

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5} = a_1 - \tfrac{1}{2}a_2,$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{7} = a_1 + \tfrac{1}{2}a_2,$$

of

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{7} + \sqrt{5}),$$

$$\alpha = \tfrac{1}{4}[3\sqrt{5} - \sqrt{7}] = 1{,}0256\,..,$$
$$\beta = \sqrt{7} - \sqrt{5} = 0{,}4097\,..$$

Om de waarde van S te vinden, dient hier de ontwikkeling

$$\sqrt{1 + \frac{1+x}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + \frac{x}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\left\{1 + \frac{x}{2\,.\,3} - \frac{x^2}{8\,.\,9} + \ldots\right\},$$

dus

$$b_2 = -\frac{\sqrt{6}}{144}$$

en

$$S = -\frac{\sqrt{6}}{576} = -\,0{,}00425\,..$$

Overigens kan hier de waarde van M zelf gemakkelijk gevonden worden; ik vind

$$M = -\,0{,}00437\,..$$

Dat hier aan de gestelde voorwaarden voldaan is, ligt voor de hand.

Ik merk nog op, dat de vergelijking (7) in verband met (4) doet zien, dat wanneer men eene functie $f(x)$ voor $0 < x < \pi$ benaderd wil voorstellen door

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx,$$

voor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de waarden

$$\frac{\pi}{n+1},\ \frac{2\pi}{n+1},\ \ldots,\ \frac{n\pi}{n+1},$$

genomen moeten worden. Dit zijn juist de waarden voor welke Lagrange eene eenvoudige methode gegeven heeft om $a_1, a_2, \ldots, a_n$ te bepalen, namelijk de vergelijkingen (1) op te lossen. Het resultaat is

De grootheid M is hier

$$\pi M = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} f(x)\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{n+1}}^{\pi} f(x)\,d$$

ze convergeert blijkbaar voor $n = \infty$ tot nul, wanne
eene continue functie van x is.

I.

(Brochure imprimée à Delft en 1876)
(traduction)

De la représentation approximative d'une fonction par une autre.

Les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant continues pou toutes les valeurs de x entre a et b, on peut se proposer de donner au constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des valeurs telles que pour $a < x < b$ la fonctio $\varphi(x)$ diffère de $f(x)$ aussi peu que possible.

Il est clair que dans ce but on peut déterminer les constantes $a_1, a_2, \ldots, a$ par la condition que pour

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1, \\ x = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ x = x_n \end{array}\right\} (a < x_1 < x_2 \ldots < x_n < b)$$

la fonction $\varphi(x)$ prenne les mêmes valeurs que $f(x)$, en sorte qu'on ai

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x_p) = \varphi(x_p, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

pour toutes les valeurs $p = 1, 2, \ldots, n$.

En prenant $\varphi(x)$ au lieu de $f(x)$ on commet une erreur

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R(x) = f(x) - \varphi(x).$$

$R(x)$ est une fonction continue de x qui s'annule pour

Supposons la courbe

$$y = \mathrm{R}(x) = f(x) - \varphi(x)$$

construite; d'après ce que nous venons de dire elle
aux n points

$$x = x_1,$$
$$x = x_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x = x_n,$$
$$y = 0.$$

La concordance des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ est bonne
$y = \mathrm{R}(x)$ s'éloigne peu de l'axe des X pour $a < x < b$.
nombre n des grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on peut obtenir un
dance de $\varphi(x)$ avec $f(x)$; mais, si le nombre n est
l'approximation qu'on peut atteindre dépend du ch
$x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous examinerons maintenant quel est
le choix le plus convenable.

A cet effet, il est nécessaire de dire ce qu'il faut ent
minimum des deux fonctions. Ici nous prendrons p
écart la somme de toutes les aires comprises ent
courbe $y = \mathrm{R}(x)$ et les deux ordonnées extrêmes qui co
et à $x = b$; toutes ces aires étant comptées de mêm
représentons cette somme par

$$(b - a)\,\mathrm{M},$$

M est la moyenne arithmétique des erreurs entre $x =$
les erreurs étant prises en valeur absolue. Il faudra d
grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de manière à rendre M minimu

Dans l'hypothèse que $\mathrm{R}(x)$ change de signe toutes
par une des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et que $\mathrm{R}(x)$ ne s'a
autre valeur de la variable entre a et b, on a

M dépend donc ici de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de même que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en dépen-dent d'après les équations (1)

Mais on peut aussi prendre $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme variables indépen-dantes ; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont alors les racines de l'équation

$$f(x) = \varphi(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

et peuvent être considérées comme dépendant de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Les con-ditions pour que M soit minimum sont alors

$$\frac{\partial M}{\partial a_1} = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial a_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial M}{\partial a_n} = 0,$$

ou bien, vu que $R(x)$ s'annule toutes les fois aux limites variables de intégrales,

$$0 = \int_a^{x_1} \frac{\partial R(x)}{\partial a_p} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial R(x)}{\partial a_p} dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \frac{\partial R(x)}{\partial a_p} dx.$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

Mais suivant l'équation (2)

$$-\frac{\partial R}{\partial a_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_p}.$$

Donc

$$(3) \quad . \quad . \quad 0 = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p} dx + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{b} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial a_p} dx.$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

Les équations (1) et (3) qui sont au nombre de $2n$, peuvent servir à l détermination de $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

on obtient

$$0 = \int_0^{u_1} \psi(\cos u) \sin u \, du - \int_{u_1}^{u_2} \psi(\cos u) \sin u \, du + \ldots + (-1)$$

Or

$$\frac{\sin pu}{\sin u} = 2^{p-1} \cos^{p-1} u - \ldots\ldots$$

est une fonction de cos u entière et rationnelle du c
peut donc poser

$$\psi(\cos u) = \frac{\sin pu}{\sin u}$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on trouve de cette façon

$$(7) \quad . \quad . \; 0 = \int_0^{u_1} \sin pu \, du - \int_{u_1}^{u_2} \sin pu \, du + \ldots + (-1)^n \int_{u_n}$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$0 = 2 \cos pu_1 - 2 \cos pu_2 + \ldots + (-1)^{n-1} 2 \cos pu_n -$$
$$(p = 1, 2, \ldots, n)$$

On voit aisément que les valeurs

$$u_1 = \frac{\pi}{n+1} = \alpha,$$
$$u_2 = \frac{2\pi}{n+1} = 2\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = \frac{n\pi}{n+1} = n\alpha$$

satisfont à cette équation, car si l'on pose

$$P = 2 \cos p\alpha - 2 \cos 2p\alpha + 2 \cos 3p\alpha - \ldots + (-1)$$

il s'ensuit

Or on a

$$\sin(n+1)pa = \sin p\pi = 0$$

et

$$\sin npa = \sin(p\pi - pa) = (-1)^{p-1}\sin pa.$$

On conclut de là, vu que $\sin pa$ ne peut pas être nul, que

$$P = 1 + (-1)^{n+p-1}.$$

Pour $n=1$ on vérifie immédiatement que $u_1 = \frac{\pi}{2}$ satisfait à l'équation (7).

Il est donc démontré que les valeurs (6) satisfont au problème. Reste à parler de la valeur de M; elle est

$$2M = \int_{-1}^{x_1} f(x)\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{+1} f(x)\,dx.$$

Lorsque $f(x)$ pour toutes les valeurs de x entre -1 et $+1$ peut être développée en une série

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = \sum_{p=0}^{p=\infty} b_p x^p,$$

les n premiers termes de l'équation qui donne 2M disparaissent quand on y substitue cette valeur de $f(x)$. Il reste

$$2M = \int_{-1}^{x_1} \sum_{p=0}^{p=\infty} b_{n+p}\, x^{n+p}\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{+1} \sum_{p=0}^{p=\infty} b_{n+p}\, x^{n+p}\,dx.$$

Si nous prenons $p=0$, pour trouver une valeur approchée S de M, nous avons

$$2S = b_n \left\{ \int_{-1}^{x_1} x^n\,dx - \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{1} x^n\,dx \right\}$$

ou bien

$$2S = b_n \left\{ \int^{x_1} [x^n + \psi(x)]\,dx - \ldots + (-1)^n \int^{1} [x^n + \psi(x)]\,dx \right\},$$

$$2S = (-1)^n b_n \left\{ \int_0^{u_1} [\cos^n u + \psi(\cos u)] \sin u \, du - \ldots \right.$$

$$+ (-1)^n \int_{u_n}^{\pi} [\cos^n$$

Or, au lieu de $\cos^n u + \psi(\cos u)$ on peut prend

$$\frac{\sin(n+1)u}{2^n \sin u} = \cos^n u - \ldots$$

et alors on trouve après l'intégration

$$2S = \frac{(-1)^n b_n}{2^n (n+1)} \left\{ -2\cos(n+1)u_1 + 2\cos(n+1) \right.$$

$$+ (-$$

partant, comme

$$(n+1) u_p = p\pi,$$

$$(8) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad S = \frac{(-1)^n b_n}{2^n}.$$

Considérons un seul exemple: on demande de tivement $\sqrt{1+y}$ pour $0 < y < 1$ par une express

Ici il faut prendre d'abord

$$\sqrt{1 + \frac{1+x}{2}} = a_1 + a_2 x.$$

$$(-1 < x < +1)$$

Alors $n = 2$,

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2},$$

$$x_2 = \cos\frac{\pi}{3} = +\tfrac{1}{2},$$

par conséquent

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5} = a_1 - \tfrac{1}{2} a_2,$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{7} = a_1 + \tfrac{1}{2} a_2,$$

ou

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(\sqrt{7} + \sqrt{5})$$

Donc

$$\alpha = \tfrac{1}{4}[3\sqrt{5} - \sqrt{7}] = 1{,}0256\ldots,$$
$$\beta = \sqrt{7} - \sqrt{5} = 0{,}4097\ldots$$

Pour trouver la valeur de S, on se sert du développement en série suivant:

$$\sqrt{1 + \frac{1+x}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + \frac{x}{3}}$$
$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\left\{1 + \frac{x}{2\,.\,3} - \frac{x^2}{8\,.\,9} + \ldots\right\}.$$

Donc

$$b_2 = -\frac{\sqrt{6}}{144}$$

et

$$S = -\frac{\sqrt{6}}{576} = -0{,}00425\ldots$$

D'ailleurs la valeur précise de M peut aisément être calculée dans ce cas. Je trouve

$$M = -0{,}00437\ldots$$

Il est évident que les conditions posées sont satisfaites.

J'observe encore que l'équation (7) jointe à l'équation (4) fait voir que si l'on veut approximativement représenter une fonction $f(x)$ par

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots + a_n \sin nx,$$
$$(0 < x < \pi)$$

il faut prendre pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs

$$\frac{\pi}{n+1}, \ \frac{2\pi}{n+1}, \ \ldots, \ \frac{n\pi}{n+1}.$$

Ce sont là précisément les valeurs pour lesquelles Lagrange a donné une méthode simple permettant de déterminer $a_1, a_2, \ldots, a_n$, c. à d. de résoudre les équations (1). Le résultat est le suivant:

La grandeur M est ici donnée par l'équation

$$\pi \mathrm{M} = \int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}} f(x)\,dx - \ldots + (-1)^{n} \int_{\frac{n\pi}{n+1}}^{\pi} f(x$$

Pour $n = \infty$ elle converge évidemment vers zéro
c'est ici le cas, est une fonction continue de x.

II.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 4, 1878, 100—104.)

Een en ander over de integraal $\int_0^1 \log \Gamma(x+u)\,du$.

In het volgende zal ik laten zien, dat de waarde van deze integraa gevonden kan worden door onmiddellijke toepassing van de gewond definitie van eene bepaalde integraal, en daaraan eenige opmerkinger toevoegen over eene functie, waarvan de afgeleide van $\log \Gamma(x)$ eer bijzonder geval is

De waarde van de bovenstaande integraal is bekend, en wel is[1]

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^1 \log \Gamma(x+u)\,du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x.$$

Hierin wordt x positief ondersteld; als uiterste waarde kan $x=$ zijn, dan is

$$(2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^1 \log \Gamma(u)\,du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

In deze laatste integraal wordt $\log \Gamma(u)$ voor $u=0$ oneindig, maar ui

$$\int_0^1 \log \Gamma(u)\,du = \int_0^1 \log \Gamma(u+1)\,du - \int_0^1 \log u\,du$$

ziet men, dat de integraal toch eene eindige waarde heeft, en welk die waarde is; want de eerste integraal rechts is volgens (1) gelijl aan $\tfrac{1}{2}\log 2\pi - 1$, en de tweede is gelijk aan -1.

Ik onderstel nu x positief, en ga uit van de bekende formules

Om echter te zien wat hierbij uit het tweede lid v
eenige andere eigenschappen van de functie $\psi(x,$
Uit de als definitie gestelde formule (7) volgt o

$$\psi(x+1, p) = \psi(x, p) + \frac{1}{x^p},$$

en algemeener

(9) $$\psi(x+k, p) = \psi(x, p) + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \dots +$$

Uit deze laatste formule blijkt, dat (7) ook aldus gesch

$$\psi(x, p) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x+n, p) + \psi\right.$$

of

$$0 = \lim_{n=\infty}\left(\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x+n, p)\right),$$

waarvoor men verder mag schrijven

$$0 = \lim_{n=\infty}\left(\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x+n,\right.$$

want het verschil

$$\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p} - \frac{n^{1-p}-1}{1-p}$$

convergeert voor $n=\infty$ tot nul. Voor $p>1$ en vo
dit dadelijk, en wanneer p tusschen 0 en 1 ligt,

$$\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p} - \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \int_0^{x+n}\frac{du}{u^p} - \int_0^n \frac{du}{u^p} = \int_n^{x+}$$

$$(0 < \theta < 1)$$

Vervangt men nu nog $n+x$ door x, dan volgt

(10) . . . . $$\lim_{x=\infty}\left(\frac{x^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x, p)\right) = 0.$$

Is nu x positief en $0 < p \leqq 1$, dan volgt hieruit voor $k = \infty$, op (10) lettende

(11) . . . . . . $$\int_0^1 \psi(x+u, p)\, du = \frac{x^{1-p}-1}{1-p}.$$
$$(x > 0,\ 0 < p \leqq 1)$$

Stelt men in de formule, waaruit dit door grensovergang afgeleid werd, $x = \frac{1}{k}$ en daarna $k = \infty$, dan blijkt, dat de formule (11) ook nog geldt voor $x = 0$.

Uit deze formule (11) ontstaat nu voor $p = 1$ de formule (6).

Ik eindig met eenige verdere opmerkingen omtrent de functie $\psi(x, p)$.

Is x positief, dan kan $\psi(x, p)$ door eene bepaalde integraal uitgedrukt worden

(12) . . . $$\psi(x, p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right) e^{-u} u^{p-1}\, du,$$

waaruit men weder verdere ontwikkelingen kan afleiden, bijv.

(13) . . $$\psi(x, p) = \psi(1, p) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \frac{1-u^{x-1}}{1-u} \left(\log \frac{1}{u}\right)^{p-1} du,$$

(14) $$\psi(x, p) = \frac{x^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{2x^p} - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right) e^{-xu} u^{p-1}\, du$$

Men kan namelijk, wanneer x positief is, de formule (7) herleiden door $\frac{1}{x^p}$, $\frac{1}{(x+1)^p}$ enz. als bepaalde integralen te schrijven van den vorm

$$\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1} e^{-au}\, du,$$

en eveneens de eerste term

$$\frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-nu}}{u} u^{p-1}\, du.$$

Deze laatste formule ontstaat uit de voorafgaande, door met da te vermenigvuldigen, en tusschen de grenzen $a = 1$ en $a = n$ te integreeren.

II.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 4, 1878

(traduction)

Remarques sur l'intégrale $\int_0^1 \log \Gamma(x$

Je me propose de faire voir ici, que la valeur de
être trouvée par une application immédiate de la
de l'intégrale définie. J'ajouterai quelques remarq
fonction qui dans un cas particulier se réduit à la

La valeur de l'intégrale écrite ci-dessus est connue

$$(1) \quad \ldots \quad \int_0^1 \log \Gamma(x+u)\, du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + x\log x -$$

Dans ces expressions x a par hypothèse une valeu
Dans ce dernier cas on a

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad \int_0^1 \log \Gamma(u)\, du = \tfrac{1}{2}\log 2\pi.$$

Pour $u=0$, l'expression $\log \Gamma(u)$ qui figure dans l
devient infinie, mais la formule

$$\int_0^1 \log \Gamma(u)\, du = \int_0^1 \log \Gamma(u+1)\, du - \int_0^1 \mathrm{lo}$$

montre que cette intégrale a néanmoins une valeur
de cette formule. En effet, la première intégrale
vaut $\frac{1}{2}\log 2\pi - 1$ d'après la formule (1), et la sec
Je suppose maintenant x positif et je pars de

La formule (4) donne le développement ordinaire de $\log \Gamma(x)$ en une série semi-convergente, limitée aux premiers termes.

Il résulte de (3)

(5) $$\frac{1}{n}\left[\log \Gamma(x) + \log \Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right) + \ldots + \log \Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right] =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\log 2\pi - \left(x - \frac{1}{2n}\right)\log n + \frac{1}{n}\log \Gamma(nx).$$

Pour $n=\infty$ le premier membre devient

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u)\,du,$$

et la limite du second membre est aisément trouvée à l'aide de (4).

Je commence par traiter le cas $x=\frac{1}{n}$. Dans ce cas spécial la formule (3) peut être déduite beaucoup plus facilement que dans le cas général: il suffit alors d'employer la formule

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Au lieu de (5) on trouve alors

$$\frac{1}{n}\left[\log \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) + \log \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + \log \Gamma\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\log 2\pi - \frac{1}{2n}\log n$$

et pour $x=\infty$ on obtient la formule (2).

Dans le cas général le second membre de (5) devient d'après la formule (4)

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\log 2\pi - \left(x - \frac{1}{2n}\right)\log n + \frac{1}{2n}\log 2\pi + \left(x - \frac{1}{2n}\right)\log nx - x + \frac{\theta}{12n^2x} =$$
$$= \frac{1}{2}\log 2\pi + \left(x - \frac{1}{2n}\right)\log x - x + \frac{\theta}{12n^2x}$$

et pour $n=\infty$ on trouve la formule (1).

En différentiant la formule (1) par rapport à x, on trouve

(6) . . . . $$\int_0^1 \psi(x+u)\,du = \log x,$$

où l'on a posé

L'hypothèse $x=0$ ou $x=1$ peut servir à la dé
constante C, si l'on suppose la formule (2) connu
dernière, elle peut être trouvée assez facilement, co
fait remarquer plus haut.

La formule (6) est un cas particulier d'une form
En effet, si l'on prend une fonction $\psi(x, p)$, défi

$$(7)\quad \psi(x, p) = \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \ldots - \right.$$

$$(p > 0,\ x > 0)$$

ce qui pour $p=1$ prend la forme

$$\psi(x, 1) = \lim_{n=\infty} \left\{ \log n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{}{x} \right.$$

et, pour $p > 1$, la forme

$$\psi(x, p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \frac{1}{(x+1}$$

il est aisé de voir que $\psi(x, p)$ a réellement une va
la fonction $\psi(x, 1)$ est identique à celle que nous a
haut par $\psi(x)$.

Il n'est pas même nécessaire de supposer tou
qu'on ait affaire à des fonctions réelles; dans l'éq
$\psi(x, 1)$ par exemple, x peut fort bien devenir né

Lorsque k est un nombre entier positif, il s'en

$$\psi(x, p) + \psi\left(x + \frac{1}{k}, p\right) + \psi\left(x + \frac{2}{k}, p\right) + \ldots + \psi\left(\right.$$

$$= \lim_{n=\infty} k^p \left\{ \frac{(nk)^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{(kx)^p} - \frac{1}{(kx+1)^p} - \ldots - \frac{}{(kx+} \right.$$

ou

$$(8)\quad \psi(x, p) + \psi\left(x + \frac{1}{k}, p\right) + \ldots + \psi\left(x + \frac{k-1}{k}, p\right) = k^p$$

ce qui apparaît immédiatement, si dans (7) on r

Mais avant d'examiner ce que devient alors le second membre, je dois commencer par établir quelques autres propriétés de la fonction $\psi(x, p)$.

De la formule (7) qui définit la fonction $\psi(x, p)$, on tire immédiatement

$$\psi(x+1, p) = \psi(x, p) + \frac{1}{x^p},$$

et plus généralement

$$\psi(x+k, p) = \psi(x, p) + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \ldots + \frac{1}{(x+k-1)^p}. \tag{9}$$

Cette dernière formule fait voir qu'au lieu de (7) on peut également écrire

$$\psi(x, p) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x+n, p) + \psi(x, p)\right),$$

ou

$$0 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x+n, p)\right).$$

Cette dernière équation peut être remplacée par

$$0 = \lim_{n=\infty} \left(\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p} - \psi(x+n, p)\right).$$

En effet, la différence

$$\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p} - \frac{n^{1-p}-1}{1-p}$$

converge vers zéro pour $n=\infty$. On le voit immédiatement pour $p > 1$ et pour $p=1$; lorsque p est entre 0 et 1, la vérité de cette proposition ressort du calcul suivant:

$$\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p} - \frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \int_0^{x+n} \frac{du}{u^p} - \int_0^n \frac{du}{u^p} = \int_n^{x+n} \frac{du}{u^p} = \frac{x}{(n+\theta x)^p}.$$

$$(0 < \theta < 1)$$

En remplaçant encore $n+x$ par x, on en tire

(10) $\lim \left(\frac{x^{1-p}-1}{\ldots}\right. \ldots (x, p)\Big) = 0$

Si l'on suppose x positif et $0 < p \leqq 1$, il s'ensu
égard à la formule (10),

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^1 \psi(x+u, p)\, du = \frac{x^{1-p}-1}{1-p}.$$

$$(x > 0,\ 0 < p \leqq 1)$$

La formule (11) est valable aussi pour $x=0$;
il faut poser $x = \frac{1}{k}$, et ensuite $k = \infty$ dans la fo
nous venons de dériver la formule (11) en passar

Or, pour $p=1$, la formule (11) se transforme

Je termine en faisant encore quelques remarq
fonction $\psi(x, p)$.

Lorsque x est positif, $\psi(x, p)$ peut être exprimé
définie

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad \psi(x, p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right) e^{-u} u^p$$

d'où l'on peut tirer entre autres les développeme

$$(13) \quad . \quad . \quad \psi(x, p) = \psi(1, p) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \frac{1-u^{x-1}}{1-u} \left(\log \frac{1}{u}\right.$$

$$(14) \quad \psi(x, p) = \frac{x^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{2x^p} - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u}\right.$$

En effet, lorsque x est positif, on peut réduire
écrivant $\frac{1}{x^p}$, $\frac{1}{(x+1)^p}$, etc. sous forme d'intégrales d

$$\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1} e^{-au}\, du.$$

On a de même pour le premier terme

$$\frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-nu}}{u} u^{p-1}$$

Cette dernière formule se tire de l'avant-dernièr
plie celle-ci par da et qu'on intègre entre les lim

III.

(J. Math., Berlin, 89, 1880, 343—344.)

Notiz über einen elementaren Algorithmus.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ reelle Zahlen, M_1 ihr arithmetisches Mittel, M_2 das arithmetische Mittel aller Producte aus je zwei verschiedenen dieser Zahlen, M_3 das arithmetische Mittel aller Producte aus je drei verschiedenen dieser Zahlen u. s. w. Die letzte der auf diese Weise zu bildenden Grössen ist $M_k = a_1 a_2 \ldots a_k$. Es soll ferner festgesetzt werden $M_0 = 1$.

Im Allgemeinen ist dann

$$M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1}$$
$$(p = 1, 2, \ldots, k-1)$$

positiv; genauer gefasst: dieser Ausdruck wird nie negativ und nur dann gleich Null, wenn entweder sämmtliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ einander gleich sind, oder wenn mindestens $k-p+1$ dieser Zahlen gleich Null sind. Im letzteren Falle ist offenbar $M_p = M_{p+1} = 0$. Sind jetzt die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sämmtlich positiv und setzt man

$$a_p' = \frac{M_p}{M_{p-1}},$$
$$(p = 1, 2, \ldots, k) .$$

und wenn von den Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ keine $> a_1$

$$a_1' = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \leqq \frac{(k-1)a_1 +}{k}$$

$$a_k' = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}} > a_k,$$

folglich:

$$0 < a_1' - a_k' < \frac{k-1}{k}(a_1 - a_k).$$

Durch wiederholte Anwendung der Operation
Zahlen $a_1', a_2', \ldots, a_k'$ aus $a_1, a_2, \ldots, a_k$ hergeleitet wur
Gruppen von k Zahlen, deren Product unveränd
sie sich unbegrenzt einander nähern Die Za

convergiren also sämmtlich gegen die Grenze (a

Bezeichnet man die Zahlen der n^{ten} abgeleitet

$$a_p^{(n)},$$
$$(p = 1, 2, \ldots, k)$$

so werden die Differenzen

$$a_p^{(n)} - a_{p+1}^{(n)},$$
$$(p = 1, 2, \ldots, k-1)$$

welche sich beliebig der Null nähern, immer m
sodass das Verhältniss von je zwei dieser Differe
für $n = \infty$ die Einheit zur Grenze hat.

IV.

(Amsterdam, Versl. K. Akad. Wet., 1e sect., sér. 2, 17,
1882, 239—254.)

Over Lagrange's Interpolatieformule.

1. De gewoonlijk aldus genoemde formule leert de geheele rationale functie van x, van den $n-1^{\text{sten}}$ graad hoogstens, die voor de n bijzondere waarden $x=x_1$, $x=x_2$, …, $x=x_n$ met eene willekeurige functie $f(x)$ in waarde overeenkomt, onder den volgenden vorm kennen

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)}\, f(x_p),$$

waarin

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

en $\varphi'(x)$ als gewoonlijk, de afgeleide functie van $\varphi(x)$ voorstelt.

Is de functie $f(x)$ zelf geheel rationaal, van niet hoogeren dan den $n-1^{\text{sten}}$ graad, dan is identiek

$$f(x)=\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)}\, f(x_p).$$

In het algemeen echter moet deze formule aangevuld worden door eene rest, evenals dit bij het theorema van Taylor het geval is.

ledige rest van de reeks van Taylor voorstelt,
Lagrange[1]) kan afleiden, kan men ook een analog
interpolatieformule van Lagrange uit de veelv
leiden, waaronder Hermite de rest voorstelt
veeltijds deze vereenvoudigde rest bij de reeks
zonder van de hulpmiddelen der integraalrekenin
kan men hetzelfde ook voor den analogen rest
polatieformule verlangen. Eene zoodanige ont
het volgende gegeven.

Ik merk nog op dat, hoewel de hier verkregen re
uit Hermite's formule afgeleid kan worden, de
vereenvoudigden restvorm gegeven heeft. Het is
elementaire eigenschap van bepaalde enkelvoudige
voudige integralen uit te breiden, wat echter gee

De te bewijzen formule kan aldus geschreven

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad f(x)=\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)}\, f(x_p)+\frac{\varphi(}{1\,.\,2\,.}$$

waarin ξ eene waarde heeft, gelegen tusschen
kleinste der getallen $x, x_1, \ldots, x_n$.

Hierbij moet ondersteld worden, dat de
$f'(z), f''(z), \ldots, f^{n-1}(z)$ eindig en continu zijn voor
gelegen tusschen $x, x_1, \ldots, x_n$ en dat voor dezelf
functie $f^{n-1}(z)$ een eindig en bepaald differentiaalq

De formule (1) neemt een meer eleganten vorm
er $f^n(\xi)$ uit afzondert; men overtuigt zich gemak
deze gedaante aanneemt

$$(2) \quad \ldots \quad \frac{f(x)}{\psi'(x)}+\frac{f(x_1)}{\psi'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{\psi'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\psi'(x_n)}=\frac{}{1\,.\,2}$$

waarin

2. Het bewijs van de formule (1) berust nu op de volgende hulpstelling:

„Wanneer de functie $G(z)$ voor de $n+1$ verschillende waarden $z=x, z=x_1, \ldots, z=x_n$ de waarde nul aanneemt, dan neemt het n^{de} differentiaalquotiënt $G^n(z)$ de waarde nul aan voor eene waarde $z=\xi$ gelegen tusschen het grootste en het kleinste der getallen $x, x_1, \ldots, x_n$."

Ondersteld wordt hierbij, dat $G(z), G'(z), \ldots, G^{n-1}(z)$ eindig en continu zijn voor alle waarden van z gelegen tusschen $x, x_1, \ldots, x_n$ en dat voor dezelfde waarden van z de functie $G^{n-1}(z)$ een eindig en bepaald differentiaalquotiënt $G^n(z)$ heeft.

Voor $n=1$ is dit een bekend theorema, waaromtrent het voldoende is te verwijzen naar Dini, Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali, p. 70.

Het bewijs van dit theorema, evenals dat van eenige nauw verwante, zooals het in de nog meest gangbare leerboeken voorkomt, bijv. Serret, Cours de calcul differentiel et intégral, bevat eene leemte die eerst aangevuld werd door eenige onderzoekingen van Weierstrass, men zie Dini, p. 43—51. Weierstrass zelf schijnt van deze onderzoekingen omtrent de grondslagen der functieleer niets gepubliceerd te hebben.

Het is vooral noodig op te merken, dat in het eenvoudigste geval $n=1$ de grootheid ξ tusschen x en x_1 ligt, en verschillend zoowel van x als van x_1 aangenomen mag worden.

Het bewijs van de hulpstelling in het algemeene geval volgt nu onmiddellijk uit de waarheid in het eenvoudigste geval $n=1$. Is namelijk $n=2$, dus

$$G(x)=0, \qquad G(x_1)=0, \qquad G(x_2)=0,$$

dan kan men onderstellen

$$x < x_1 < x_2 \quad .$$

in het algemeene geval ξ ondersteld mag worden
noch aan het grootste, noch aan het kleinste der g
De voorwaarden van continuiteit en differentieerbaar
de functie $G(z)$ en de afgeleide functies moet stelle
moeite uit die, welke voor het geval $n=1$ gesteld

3. Het bewijs van de formule (1) kan nu aldus
Ter bekorting moge het interpolatiepolynomium v
$F(x)$ aangeduid worden, zoodat

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad F(x)=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)}\,f(x_p).$$

Onder de waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ komen geen twe
daar de functiën $F(x)$ en $f(x)$ voor $x=x_1, x=x_2, \ldots$
waarden aannemen, en het ons te doen is om in het
knopten vorm van het verschil $f(x)-F(x)$ te vinden
hierbij zonder nadeel de onderstelling maken, dat
samenvalt met een der waarden $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dit aangenomen, zij

$$(4) \quad \ldots \quad f(x)=F(x)+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-$$

De waarde van R is dan hierdoor volkomen be
verder, voor een oogenblik, $x, x_1, \ldots, x_n$ als consta
den en z eene nieuwe veranderlijke is, beschouwen

$$(5) \quad . \quad . \quad G(z)=-f(z)+F(z)+(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z$$

waarin dus R de door (4) volkomen bepaalde, va
waarde heeft.

Blijkbaar is nu, niet alleen

$$G(x)=0,$$

maar ook

en is

$$G^n(z) = -f^n(z) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot R.$$

Wegens (6) volgt nu

$$R = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(\xi)$$

en dit in (4) gesubstitueerd geeft

$$f(x) = F(x) + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^n(\xi),$$

waarmede het bewijs van de formule (1) geleverd is.

4. Wanneer men in de nu ook bewezen formule (2) de steed ongelijke getallen x, x_1, ..., x_n allen tot eenzelfde limiet X laat con vergeeren, dan volgt

$$(7) \quad . \quad . \quad \operatorname{Lim} \left\{ \frac{f(x)}{\psi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\psi'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\psi'(x_n)} \right\} = \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} f^n(X).$$

Behalve de onderstellingen die voor de geldigheid der formulen (1 en (2) gemaakt moeten worden, moet bij deze laatste formule boven dien nog $f^n(x)$ voor $x = X$ continu zijn, daar men anders niet kan besluiten, dat $f^n(\xi)$ bij convergentie van ξ tot X, tot de limiet f^n(X convergeert.

Deze formule (7), die dus in het geval, dat $f^n(x)$ voor $x = X$ continu is, eene directe algemeene definitie van het n^{de} differentiaalquotiën van eene functie $f(x)$ geeft, schijnt nog niet in de hier gegeven alge meenheid bewezen te zijn Wel komt zij voor in het uitstekende werk van Lipschitsch, Differential- und Integralrechnung, p. 204 Form. 20, maar bij het daar voorkomende bewijs moet men onder stellen, dat x, x_1, ..., x_n bij hunne convergentie tot de limiet X, behalve dat zij steeds ongelijk blijven, nog aan andere condities moeten vol doen, die hier overbodig blijken. Zie t. a. p. p. 203, regel 6 v. o En verder is daar het bestaan van een eindig en continu $n + 1^{st}$ ifferentiaalquotiënt aangenomen. Ook deze conditie ligt stellig in het geheel niet in den aard der zaak, en nadat Weierstrass continue functies heeft leeren kennen, die niet differentieerbaar zijn, zou niets

gemakkelijker zijn dan functiën op te stellen, voor we
geldig is, maar waarbij van geen $n+1^{\text{ste}}$ differentia
kan zijn [1])

5. De overeenkomst van de formule (1) met h
Taylor valt nog meer in het oog, wanneer men het
niet voorstelt onder de elegante en symmetriek
Lagrange gegeven, maar onder den vorm, dien Newt
der Principia bij gelegenheid van zijne behandeling
probleem geeft.

De formule (1) neemt dan namelijk deze gedaante

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = A_1 + A_2(x-x_1) + A_3(x-x_1)(x-$$
$$+ A_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{1\,.\,2\,.\,3\dots n} f^{(n)}$$

Hierin is

$$A_1 = f(x_1), \qquad A_2 = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2-x}$$

en algemeen

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} A_p = \dfrac{f(x_1)}{\varphi'_p(x_1)} + \dfrac{f(x_2)}{\varphi'_p(x_2)} + \dots + \dfrac{f(x_p}{\varphi'_p(x} \\ \varphi_p(z) = (z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_p). \end{cases}$$

Newton geeft niet explicite deze algemeene uitd
maar wel de volgende rekenvoorschriften om achtereen
te berekenen:

$$A_1 = f(x_1), \quad A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_2 - x_1}, \quad A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_3 - x_1}, \quad A_4$$

$$B_1 = f(x_2), \quad B_2 = \frac{C_1 - B_1}{x_3 - x_2}, \quad B_3 = \frac{C_2 - B_2}{x - x}, \quad \dots$$

Stelt men deze grootheden, zooals zij achtereenvolgens gevonde worden, aldus te zamen

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{llll} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ B_1 & & A_3 & \\ & B_2 & & A_4, \\ C_1 & & B_3 & \\ & C_2 & & \\ D_1 & & & \end{array} \right.$$

dan komt deze berekening geheel overeen met die van de gewon interpolatie in het geval, dat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eene rekenkunstige reeks vor men, met deze geringe wijziging, dat de 1ste, 2de, 3de,... rijen va verschillen hier respectieve door de factoren $1.(x_2-x_1)$, $1.2.(x_2-x_1)^2$ $1.2.3.(x_2-x_1)^3 \ldots$ gedeeld voorkomen.

Volgens de formule (2) is

$$A_p = \frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)} f^{p-1}(\xi_p),$$

waarin ξ_p eene waarde heeft gelegen tusschen het grootste en het kleinst der getallen $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Laat men dus in de formule (8) $x_1, x_2, \ldots, x$ tot eenzelfde limiet convergeeren, dan ontstaat onmiddellijk de for mule van Taylor met den restvorm van Lagrange.

6. De Newton'sche vorm van het interpolatiepolynomium

$$F(x) = A_1 + A_2(x-x_1) + A_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$$
$$+ A_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})$$

heeft boven dien van Lagrange ook nog dit voordeel, dat hij onmid dellijk doet zien welken vorm $F(x)$ aanneemt, wanneer er onder d grootheden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sommige tot eenzelfde limiet convergeere of gelijk gesteld worden.

dit geval het geheele tableau (10) vormen. Men
kelijk, dat men hierbij, om onbepaalde uitdrukk
slechts die grootheden $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welke ten
worden, onmiddellijk op elkaar behoeft te laten vo
verder de formule (11) en Newton's voorschrift
geheele tableau te verkrijgen. Werden dus bij
gelijk X, dan moet men in dit geval bekend ond

$$f(\mathrm{X}),\ f'(\mathrm{X}),\ \ldots,\ f^{p-1}(\mathrm{X}).$$

Hierin schijnt dan ook de meest geschikte
om het polynomium van den laagst mogelijken g
dat aan deze voorwaarden voldoet

$$(12)\quad .\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}(x_1)=f(x_1),\ \mathrm{H}'(x_1)=f'(x_1),\ldots\ldots,\mathrm{H}^{\alpha_1-} \\ \mathrm{H}(x_2)=f(x_2),\ \mathrm{H}'(x_2)=f'(x_2),\ldots\ldots,\mathrm{H}^{\alpha_2-} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{H}(x_n)=f(x_n),\ \mathrm{H}'(x_n)=f'(x_n),\ldots\ldots,\mathrm{H}^{\alpha_n-} \end{array}\right.$$

welk polynomium H(x) hoogstens is van den graa

$$k=a_1+a_2+\ldots a_n.$$

Men verkrijgt op de boven beschreven wijze
onder dezen vorm

$$\mathrm{H}(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}(x-x_1)+\mathrm{C}(x-x_1)^2+\ldots+\mathrm{L}(x-x_1)^{\alpha_1}+$$
$$\ldots+\mathrm{R}(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}}$$

waarin de constanten A, B, C, ..., R onmiddellijk
ontleend kunnen worden.

7. Voor het verschil $f(x)$ — H(x) bestaat weder
drukking, en daar hierin eene verdere uitbreidin
(1), zoo moge de hierop betrekking hebbende

Voldoet eene functie $G(z)$ aan de condities

$$
\begin{array}{llll}
G(x)=0, & G'(x)=0, & \ldots, & G^{\alpha-1}(x)=0, \\
G(y)=0, & G'(y)=0, & \ldots, & G^{\beta-1}(y)=0, \\
G(z)=0, & G'(z)=0, & \ldots, & G^{\gamma-1}(z)=0, \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

waarvan het aantal

$$\alpha+\beta+\gamma\ldots=n$$

bedraagt, dan is

$$G^{n-1}(\xi)=0,$$

waarin ξ gelegen is tusschen de grootste en de kleinste der ongelijke waarden $x, y, z, \ldots$

Na hetgeen in art. 2 gezegd is, schijnt het niet noodig, bij het bewijs hiervan lang stil te staan. Men kan eerst het geval, dat het grootste der getallen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ twee is, beschouwen, en vervolgens voor dit grootste onder die getallen 3, 4, 5, ... aannemen.

8. Zij nu $H(x)$ het polynomium van den $k-1^{\text{sten}}$ graad hoogstens dat aan de condities (12) voldoet, en

(13) . . . $f(x)=H(x)+(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}R$

dan is, x verschillend van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ondersteld, de waarde van R hierdoor volkomen bepaald. Beschouwt men nu verder de functie

$$G(z)=-f(z)+H(z)+(z-x_1)^{\alpha_1}(z-x_2)^{\alpha_2}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n}R,$$

dan is blijkbaar niet alleen

$$G(x)=0,$$

maar ook

$$
\begin{array}{llll}
G(x_1)=0, & G'(x_1)=0, & \ldots, & G^{\alpha_1-1}(x_1)=0, \\
G(x_2)=0, & G'(x_2)=0, & \ldots, & G^{\alpha_2-1}(x_2)=0,
\end{array}
$$

en ten slotte

$$(14) \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k} f^k(\xi), \\ f(x) = H(x) + \dfrac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,k} \end{array} \right.$$

Hierin ligt ξ tusschen het grootste en het k
$x, x_1, \ldots, x_n$.

In deze formule liggen zoowel de reeks van T
van Lagrange, door een restterm aangevuld, als
opgesloten.

In de aangehaalde verhandeling stelt Hermit
het verschil $f(x) - H(x)$ met behulp van bepaalde

9. Het algemeenste resultaat, dat door de in
wikkelde methode verkregen kan worden, schijnt

Laten $f(x)$ en $H(x)$ dezelfde beteekenis behou
verder $f_1(x)$ eene nieuwe functie van x zijn en $H_1(x$
van x van den $k-1^{\text{sten}}$ graad hoogstens, die aan
doet, wanneer men daarin de functie $f(x)$ door $f_1($

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = H(x) + R\,(f_1(x) - H_1(x$$

Zal de waarde van R hierdoor op ondubbelzinnig
dan moet x niet alleen van $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschill
mag niet $f_1(x) - H_1(x) = 0$ worden.

Dit nu onderstellende, zij

$$G(z) = f(z) - H(z) - R\,(f_1(z) - H_1(z)$$

dan is niet alleen

$$G(x) = 0,$$

maar ook

$$G(x_1) = 0, \qquad G'(x_1) = 0, \quad \ldots, \quad G^{\alpha_1}$$

worden en derhalve heeft men

$$R = \frac{f^k(\xi)}{f_1^k(\xi)},$$

of wel

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = H(x) + (f_1(x) - H_1(x)) \frac{f^k(\xi)}{f_1^k(\xi)}.$$

Deze algemeene formule gaat onmiddellijk in de formule (14) over wanneer men aanneemt

$$f_1(x) = x^k.$$

Dan wordt namelijk

$$f_1^k(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots k$$

en zooals dadelijk te zien is

$$f_1(x) - H_1(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_n)^{\alpha_n}.$$

NASCHRIFT.

Dat er altijd één en niet meer dan één functie $H(x)$ bestaat, die aan de condities (12) voldoet, en hoogstens van den $k - 1^{\text{sten}}$ graad in x is, kan onmiddellijk aldus aangetoond worden.

Zij

$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{k-1} x^{k-1},$$

dan heeft men ter bepaling van de k onbekenden $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ de volgende k lineaire vergelijkingen

$$a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \dots \dots \dots + x_1^{k-1} a_{k-1} = f(x_1)$$

$$1 a_1 + 2 x_1 a_2 + \dots \dots + (k-1) x_1^{k-2} a_{k-1} = f'(x_1)$$

$$1 \,.\, 2 \,.\, a_2 + \dots + (k-1)(k-2) x_1^{k-3} a_{k-1} = f''(x_1)$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$A \dots (\alpha_1 - 1)!\, a_{\alpha_1 - 1} + \dots + (k-1)(k-2) \dots (k - \alpha_1 + 1) x_1^{k - \alpha_1} a_{k-1} =$$

$$= f^{\alpha_1 - 1}(x_1)$$

Vooreerst is nu op te merken, dat het systeem (
één oplossing kan toelaten, want waren er bijv. t
dan zoude men dus twee verschillende functies G (x
die beide aan de voorwaarden, in (12) uitgedrukt, vo
van den $k-1^{\text{sten}}$ graad hoogstens zijn. Dit nu is
uit die vergelijkingen (12) zou volgen, dat het versc

$$G(x) - H(x)$$

algebraïsch deelbaar is door de uitdrukking van den

$$(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\ldots(x-x_n)^{a_n}.$$

In de tweede plaats is het evident, dat aan (A) do

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_{k-1} =$$

voldaan wordt zoodra de tweede leden der vergel
gesteld worden, en na het bovenstaande is dit ook d
in dit geval

Uit de theorie der lineaire vergelijkingen volgt nu
de determinant van het stelsel vergelijkingen (A) niet
uit die theorie is bekend, dat zoodra deze determinan
de vergelijkingen (A), nadat daarin voor de twee
waarde nul genomen is, voldaan kan worden door e
$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, die niet allen gelijk nul zijn, wat i
met het boven bewezene.

Uit het niet gelijk nul zijn van den determinant v
gelijkingen (A), volgt nu onmiddellijk, dat aan di
keurige waarden der tweede leden, steeds door een
waarden $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ voldaan kan worden.

Men kan overigens de waarde van dien determ
aangeven.

Wanneer men namelijk in onderstaande bekende

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{k-1} \end{vmatrix}$$

de a_1 eerste der grootheden $a, b, c, \ldots, p, q$ tot de limiet x_1, de a volgende tot de limiet x_2 enz. laat convergeeren, de horizontale rijen op passende wijze transformeert, waarbij men te deelen heeft door de factoren die ten slotte gelijk nul worden, en voorts bij den grens overgang van de formule (7) gebruik maakt, verkrijgt men de navolgende waarde voor den determinant van het stelsel vergelijkingen (A)

$$
\begin{array}{ll}
0!\,1!\,2!\ldots(a_1-1)!\,(x_2-x_1)^{a_1a_2}(x_3-x_1)^{a_1a_3}\ldots(x_n-x_1)^{a_1a_n} & \\
0!\,1!\,2!\ldots(a_2-1)! \qquad\qquad (x_3-x_2)^{a_2a_3}\ldots(x_n-x_2)^{a_2a_n} & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
0!\,1!\,2!\ldots(a_n-1)! \qquad\qquad\qquad\qquad (x_n-x_{n-1})^{a_{n-1}a_n}. &
\end{array}
$$

De geheele bewerking blijkt genoegzaam uit het volgende bijzondere geval

$$k=5,\ n=2,\ a_1=3,\ a_2=2.$$

Hier heeft men

$$
\begin{vmatrix}
1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\
1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\
1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\
1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\
1 & e & e^2 & e^3 & e^4
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\
t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\
u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\
v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4
\end{vmatrix} \times (b-a)(c-a)(c-b)(e-d),
$$

waarin

$$t_r = \frac{a^r}{\quad} + \frac{b^r}{\quad}$$

Derhalve is

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = (d-a)\,(d \quad (e-a)\,(e$$

en voor

$$\lim a = \lim b = \lim c = x$$
$$\lim e = \lim d = x_2,$$

volgt nu met behulp van de formule (7)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & 1 & 2\,x_1 & 3\,x_1^2 & 4\,x_1^3 \\ 0 & 0 & 2 & 2.3\,x_1 & 3.4\,x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & 1 & 2\,x_2 & 3\,x_2^2 & 4\,x_2^3 \end{vmatrix} =$$

IV.

(Amsterdam, Versl. K. Akad. Wet., 1e sect., sér. 2, 17, 1882, 239—254.)
(traduction)

A propos de la formule d'interpolation de Lagrange.

1. La formule qu'on désigne ordinairement par ce nom fait connaîtr la fonction entière et rationnelle de x, du degré $(n-1)$ tout au plus qui pour n valeurs particulières

$$x=x_1,\ x=x_2, \ldots, x=x_n$$

prend la même valeur qu'une fonction arbitraire $f(x)$; cette fonctio rationelle a la forme suivante

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p),$$

où

$$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

et où $\varphi'(x)$ désigne, comme d'ordinaire, la dérivée de $\varphi(x)$.

Si la fonction $f(x)$ elle-même est rationnelle et du degré $(n-1$ tout au plus, on a identiquement

$$f(x)=\sum^{p=n} \frac{\varphi(x)}{\qquad} f(x_p)$$

deux manières différentes. Ces formules contienne limites, le reste de la série de Taylor.

De même que de l'intégrale définie qui représ le reste de la série de Taylor on peut immédi formule du reste de Lagrange[1]), de même aussi cas de la formule d'interpolation de Lagrange dé multiple, par lequel Hermite représente le reste, de ce reste. Mais aussi bien que dans le cas de la déduit souvent la formule simplifiée de ce reste calcul intégral, peut-on désirer la même chose pou du reste dans la formule d'interpolation. Nous dé méthode qui conduit à ce but.

Je remarque que Hermite n'a pas donné la form le reste que nous obtiendrons ici, quoique cette form être déduite de la sienne. A cet effet il est né des intégrales multiples une propriété élément définies simples, ce qui n'offre aucune difficulté.

La formule qu'il s'agit de démontrer peut êtr

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p) + \frac{\varphi(}{1\,.\,2\,.\,}$$

où ξ a une valeur intermédiaire entre le plus gr des nombres $x, x_1, \ldots, x_n$.

Il faut supposer que la fonction $f(z)$, aussi bien que soit finie et continue pour toutes les valeurs $x, x_1, \ldots, x_n$ et que pour ces mêmes valeurs de ait une dérivée $f^{(n)}(z)$ finie et déterminée

La formule (1) prend une forme plus élégante fonction $f^{(n)}(\xi)$; on se convaint aisément qu'elle suivante

On reconnait dans cette équation un cas plus général de la formule élémentaire

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi),$$

qui s'en déduit lorsqu'on pose $n=1$.

2. La démonstration de la formule (1) repose sur le lemme suivant „Lorsque la fonction $G(z)$ prend la valeur zéro pour les $n+1$ valeurs différentes $z=x$, $z=x_1$, ..., $z=x_n$, la $n^{\text{ième}}$ dérivée $G^{(n)}(z)$ devient nulle pour une valeur $z=\xi$ intermédiaire entre le plus grand et le plus petit des nombres $x, x_1, \ldots, x_n$."

Il faut supposer que les fonctions $G(z), G'(z), \ldots, G^{(n-1)}(z)$ soient finies et continues pour toutes les valeurs de z intermédiaires entre $x, x_1, \ldots, x_n$, et que, pour les mêmes valeurs de z, $G^{(n-1)}(z)$ ait une dérivée $G_n(z)$ finie et déterminée.

Ce théorème est connu pour $n=1$; il suffit de renvoyer à Dini Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, p. 70.

La preuve de ce théorème, aussi bien que de quelques théorèmes qui s'y rattachent telle qu'elle se trouve dans les livres d'étude les plus employés encore aujourd'hui, p. e. dans Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, contient une lacune qui n'a été comblée que par quelques recherches de Weierstrass; on peut consulter Dini, p. 43—51. Weierstrass lui-même n'a rien publié à ce qu'il paraît de ces recherches sur les bases de la théorie des fonctions.

Il faut surtout remarquer que dans le cas le plus simple de tous celui où $n=1$, la grandeur ξ est située entre x et x_1 et qu'on peut lui donner une valeur qui diffère tant de x que de x_1.

La preuve du lemme dans le cas général se déduit immédiatement de ce même lemme reconnu comme vrai dans le cas le plus simple celui où $n=1$. En effet, lorsque $n=2$, et par conséquent

et en appliquant encore une fois le théorème pou

$$G''(\xi) = 0. \qquad \xi_1 < \xi < \xi_2$$

On peut continuer ainsi et l'on voit en même cas général la grandeur ξ peut être supposée diff grand et du plus petit des nombres $x, x_1, \ldots, x_n$. Le doit imposer à la fonction $G(z)$ et à ses dérivées, cell et dérivables, se déduisent aisément de celles qui cas où $n = 1$.

3. La preuve de la formule (1) peut maintenant la suivante.

Pour simplifier, je désigne par $F(x)$ le polynôme Lagrange; donc

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad F(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x - x_p)\,\varphi'(x_p)} f(x_p).$$

Parmi les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il n'y en a pas de et comme les fonctions $F(x)$ et $f(x)$ prennent les m $x = x_1,\ x = x_2,\ \ldots,\ x = x_n$ et que nous nous propose formule générale et simple qui exprime la différence pouvons, sans qu'il en resulte aucun inconvénient valeur de x ne coïncide pas avec une des valeurs

Ceci posé, soit

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad f(x) = F(x) + (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x -$$

La valeur de R est complètement déterminée p Figurons-nous pour un instant que les grandeurs constantes, tandis que z représente une nouvelle varia la fonction

$$(5) \quad \ldots \quad G(z) = -f(z) + F(z) + (z - x_1)(z - x_2)\ldots($$

où ξ a une valeur intermédiaire entre le plus grand et le plus peti des nombres $x, x_1, \ldots, x_n$. Mais comme $F(z)$ est en z du degré $(n-1$ tout au plus, cette fonction donne zéro lorsqu'on différentie n fois d suite l'équation (5) On trouve donc

$$G^{(n)}(z) = -f^{(n)}(z) + 1.2.3\ldots n.R.$$

L'équation (6) donne maintenant

$$R = \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\xi)$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (4) on obtient

$$f(x) = F(x) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(\xi);$$

nous avons donc trouvé la démonstration de la formule (1).

4. Lorsque, dans la formule (2) qui maintenant a été démontré elle-aussi, on laisse tendre vers une même limite X tous les nombre $x, x_1, \ldots, x_n$, toujours différents entre eux, il s'ensuit que

(7) . . $$\operatorname{Lim}\left\{\frac{f(x)}{\psi'(x)} + \frac{f(x_1)}{\psi'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\psi'(x_n)}\right\} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(X).$$

Outre les hypothèses qui doivent être faites pour que les formule (1) et (2) soient valables, il faut encore que dans cette dernière for mule $f^{(n)}(x)$ soit continue pour $x = X$, attendu qu'il est impossibl autrement de conclure que $f^{(n)}(\xi)$ tend vers la limite $f^{(n)}(X)$ lorsque tend vers X.

Cette formule (7) qui donne donc dans le cas où la fonction $f^{(n)}(x$ est continue pour $x = X$ une définition directe et générale de l $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction $f(x)$, n'a pas encore, paraît-il, été démontré aussi généralement que nous l'avons fait ici. Elle se trouve, il es vrai, dans l'excellent ouvrage de Lipschitsch, Differential und Inte gralrechnung, p. 204, Form. 20, mais d'après la démonstratio

exigée par la nature des choses, et après que
connaître des fonctions continues qui n'ont pas de
serait plus facile que de trouver des fonctions pou
mule (7) est valable, sans qu'il puisse être quest
$n+1^{\text{ieme}}$ de ces fonctions. 1)

5. L'analogie entre la formule (1) et le théorème
plus évidente encore lorsqu'on ne donne pas au
forme élégante et symétrique que lui donne Lag
qui se trouve chez Newton dans le troisième Liv
l'occasion de la discussion du problème des comètes

La formule (1) prend alors la forme

$$(8) \quad \ldots \quad f(x) = A_1 + A_2(x-x_1) + A_3(x-x_1)(x-
+ A_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n
+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{1.2.3\ldots n} f^{(}$$

Dans cette équation on a

$$A_1 = f(x_1), \qquad A_2 = \frac{f(x_1)}{x_1-x_2} + \frac{f(x_2}{x_2-}$$

et généralement

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} A_p = \dfrac{f(x_1)}{\varphi'_p(x_1)} + \dfrac{f(x_2)}{\varphi'_p(x_2)} + \ldots + \dfrac{f(}{\varphi'_p(} \\ \varphi_p(z) = (z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_p) \end{cases}$$

Newton ne donne pas explicitement cette formule
mais il fait connaître les procédés nécessaires pou
sivement $A_1, A_2, \ldots$ etc. Ce sont les suivants

$$A_1 = f(x_1), \quad A_2 = \frac{B_1 - A_1}{x_2 - x_1}, \quad A_3 = \frac{B_2 - A_2}{x_3 - x_1}, \quad A_4$$

Si l'on fait le tableau suivant de ces grandeurs dans l'ordre où on les trouve

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} A_1 & & & & & & \\ & & A_2 & & & & \\ B_1 & & & & A_3 & & \\ & & B_2 & & & & A_4, \\ C_1 & & & & B_3 & & \\ & & C_2 & & & & \\ D_1 & & & & & & \end{array} \right.$$

ce calcul s'accorde entièrement avec celui de l'interpolation ordinaire dans le cas où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forment une progression arithmétique avec cette légère différence que la première, la deuxième, la troisième ... série des différences sont ici divisées respectivement par les facteurs $1 . (x_2 - x_1)$, $1 . 2 . (x_2 - x_1)^2$, $1 . 2 . 3 . (x_2 - x_1)^3 \ldots$ etc.

On a d'après la formule (2)

$$A_p = \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots (p-1)} f^{(p-1)}(\xi_p),$$

où ξ_p a une valeur intermédiaire entre le plus grand et le plus petit des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Si dans la formule (8) on laisse tendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vers une même limite, on obtient donc immédiatement la formule de Taylor avec la formule du reste de Lagrange.

6. La forme newtonienne du polynôme d'interpolation

$$F(x) = A_1 + A_2(x - x_1) + A_3(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$$
$$+ A_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

a encore sur celle de Lagrange l'avantage de faire voir immédiatement quelle est la forme que prend $F(x)$ lorsque plusieurs des grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers une même limite ou sont prises égales entre elles.

tout le tableau (10). En effet, on voit aisémen
éviter les expressions indéterminées de la forme
l'une par l'autre sans intervalle celles des grandeur
à la fin seront supposées égales. Pour obtenir l
faut ensuite se servir de la formule (11) et des pr
Lorsque p. e. les grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ deviennen
il faut supposer connues les quantités

$$f(\mathrm{X}),\ f'(\mathrm{X}),\ \ldots,\ f^{(p-1)}(\mathrm{X}).$$

Il semble bien que c'est là la meilleure métho
polynôme $\mathrm{H}(x)$ du degré le moins élevé qui sati
suivantes

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}(x_1)=f(x_1),\ \mathrm{H}'(x_1)=f'(x_1),\ \ldots\ldots,\ \mathrm{H}^{(\alpha_1-1)} \\ \mathrm{H}(x_2)=f(x_2),\ \mathrm{H}'(x_2)=f'(x_2),\ \ldots\ldots,\ \mathrm{H}^{(\alpha_2-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{H}(x_n)=f(x_n),\ \mathrm{H}'(x_n)=f'(x_n),\ \ldots\ldots,\ \mathrm{H}^{(\alpha_n-1)} \end{array}\right.$$

ce polynôme $\mathrm{H}(x)$ est du degré $k-1$ tout au p

$$k=\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_n.$$

On obtient, en suivant la méthode décrite p
suivante du polynôme $\mathrm{H}(x)$

$$\mathrm{H}(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}(x-x_1)+\mathrm{C}(x-x_1)^2+\ldots+\mathrm{L}(x-x_1)^{\alpha_1}+\mathrm{M}$$
$$\ldots+\mathrm{R}(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}}$$

où $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{R}$ sont des constantes qu'on peut
ment du tableau (10).

Lorsqu'une fonction $G(z)$ satisfait aux conditions

$$\begin{array}{llll} G(x)=0, & G'(x)=0, & \ldots, & G^{(\alpha-1)}(x)=0, \\ G(y)=0, & G'(y)=0, & \ldots, & G^{(\beta-1)}(y)=0, \\ G(z)=0, & G'(z)=0, & \ldots, & G^{(\gamma-1)}(z)=0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

dont le nombre est

$$\alpha+\beta+\gamma\ldots=n,$$

on a

$$G^{(n-1)}(\xi)=0,$$

où ξ est une grandeur inférieure à la plus grande et supérieure à la plus petite des grandeurs différentes $x, y, z, \ldots$

Après ce qui a été dit au n° 2, il paraît superflu de s'arreter longtemps à la démonstration de ce théorème. On peut considérer d'abord le cas où le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ est égal à 2, et prendre ensuite 3, 4, 5, ... pour le plus grand de ces nombres.

8. Soit maintenant $H(x)$ le polynôme du degré $k-1$ tout au plus qui satisfait aux conditions (12) et soit

$$(13) \quad . \quad . \quad . \quad f(x)=H(x)+(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}R.$$

Alors, si l'on suppose la grandeur x différente de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la constante R est complètement déterminée par cette équation. Si l'on considère ensuite la fonction

$$G(z)=-f(z)+H(z)+(z-x_1)^{\alpha_1}(z-x_2)^{\alpha_2}\ldots(z-x_n)^{\alpha_n}R$$

il est évident qu'on n'a pas seulement

$$G(x)=0,$$

mais aussi

$$\begin{array}{llll} G(x_1)=0, & G'(x_1)=0, & \ldots, & G^{(\alpha_1-1)}(x_1)=0, \\ G(x_2)=0, & G'(x_2)=0 & \ldots, & G^{(\alpha_2-1)}(x_2)=0, \end{array}$$

et enfin

$$(14)\quad . \ . \quad \begin{cases} R = \dfrac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} f^{(k)}(\xi), \\ f(x) = H(x) + \dfrac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k} \end{cases}$$

Dans ces équations la grandeur ξ a une valeur
celle du plus grand et du plus petit des nombres x
Cette formule comprend comme cas particulier
aussi bien que la formule de Lagrange, y com
expriment les restes.

Dans l'article cité Hermite représente pour ce c
$f(x) - H(x)$ à l'aide d'intégrales définies.

9. Le résultat le plus général qui peut être obten
nous avons développée dans ce qui précède, me pa

Supposons que les expressions $f(x)$ et $H(x)$ conse
qu'elles avaient aux n^{os} 6—8. Soit en outre $f_1(x)$ u
de x et $H_1(x)$ la fonction rationnelle de x du degr
qui satisfait aux conditions (12), lorsqu'on y r
$f(x)$ par $f_1(x)$. Soit maintenant

$$(15)\quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad f(x) = H(x) + R(f_1(x) - H_1(x)$$

Pour que la valeur de R soit déterminée sans
équation, il faut non seulement que x diffère de
en outre que $f_1(x) - H_1(x)$ ne s'annule pas.

Faisons ces hypothèses et soit

$$G(z) = f(z) - H(z) - R(f_1(z) - H_1$$

Alors on a non seulement

$$G(x) = 0,$$

mais aussi

$$G(x_1) = 0, \qquad G'(x_1) = 0, \quad \ldots, \quad G^{(\alpha}$$

et par conséquent

$$R = \frac{f^{(k)}(\xi)}{f_1^{(k)}(\xi)},$$

ou bien

$$(16) \quad \ldots\ldots \quad f(x) = H(x) + (f_1(x) - H_1(x)) \frac{f^{(k)}(\xi)}{f_1^{(k)}(\xi)}.$$

Cette formule générale se transforme immédiatement dans la formule (14) lorsqu'on prend

$$f_1(x) = x^k.$$

En effet, on a alors

$$f_1^{(k)}(x) = 1.2.3\ldots k$$

et, comme on peut le voir immédiatement,

$$f_1(x) - H_1(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x - x_n)^{\alpha_n}.$$

POSTSCRIPTUM.

On peut démontrer immédiatement de la façon suivante qu'il existe toujours une et une seule fonction $H(x)$ qui satisfait aux conditions (12) et qui est en x du degré $k - 1$ tout au plus.

Soit

$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}.$$

Pour déterminer les k grandeurs inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ on a alors les k équations linéaires suivantes

$$(A) \ldots \left\{\begin{array}{l} a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \ldots\ldots\ldots + x_1^{k-1} a_{k-1} = f(x_1) \\ \qquad 1 a_1 + 2 x_1 a_2 + \ldots\ldots + (k-1) x_1^{k-2} a_{k-1} = f'(x_1) \\ \qquad\qquad 1.2.a_2 + \ldots\ldots + (k-1)(k-2) x_1^{k-3} a_{k-1} = f''(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_1 - 1)!\, a_{\alpha_1 - 1} + \ldots + (k-1)(k-2)\ldots(k - \alpha_1 + 1) x_1^{k-\alpha_1} a_{k-1} = \\ \qquad = f^{(\alpha_1 - 1)}(x_1) \end{array}\right.$$

On peut remarquer d'abord que le système (A
d'une seule solution, car s'il pouvait y avoir p
aurait deux fonctions différentes $G(x)$ et $H(x)$
l'autre aux conditions (12) et qui seraient l'une
$k-1$ tout au plus. Or, cela est impossible, car
il résulterait que la différence

$$G(x) - H(x)$$

est algébriquement divisible par l'expression du d

$$(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\dots(x-x_n)$$

Il est évident en second lieu que les valeurs

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \dots, \quad a_{k-}$$

satisfont aux équations (A), aussitôt que les sec
équations sont égalés à zéro; et d'après ce
l'unique solution en ce cas.

La théorie des équations linéaires nous conc
cette conclusion, que le déterminant du systéme
pas nul. En effet, d'après cette théorie on p
déterminant est nul, satisfaire aux équations (A),
partout les seconds membres par zéro, par un
$a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$, qui ne sont pas toutes nulles
à ce que nous avons démontré plus haut

Et de ce que le déterminant du système d'é
nul, il résulte immédiatement qu'on peut toujour
membres ont de valeurs arbitraires, satisfaire à c
par un seul système de valeurs $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$.

D'ailleurs on peut aisément indiquer la valeur

A cet effet on peut partir de la formule connue

où les α_1 premières des grandeurs $a, b, c, \ldots, p, q$ tendront à la fi
vers la limite x_1, les α_2 grandeurs qui suivent vers la limite x_2, etc
Il faut transformer convenablement les lignes de ce déterminant, e
les divisant par les facteurs qui s'annulent à la fin et en appliquan
à la limite la formule (7). On obtient ainsi pour le déterminant d
système d'équations (A) la valeur suivante

$$\begin{array}{ll}
0\,!\,1\,!\,2\,!\ldots(\alpha_1-1)\,! & (x_2-x_1)^{\alpha_1\alpha_2}(x_3-x_1)^{\alpha_1\alpha_3}\ldots(x_n-x_1)^{\alpha_1\alpha_n} \\
0\,!\,1\,!\,2\,!\ldots(\alpha_2-1)\,! & \qquad\qquad\qquad\;\;(x_3-x_2)^{\alpha_2\alpha_3}\ldots(x_n-x_2)^{\alpha_2\alpha_n} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0\,!\,1\,!\,2\,!\ldots(\alpha_n-1)\,! & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(x_n-x_{n-1})^{\alpha_{n-1}\alpha_n}.
\end{array}$$

La suite des opérations est suffisamment évidente d'après la con
sidération d'un cas particulier, celui où

$$k=5,\ n=2,\ \alpha_1=3,\ \alpha_2=2.$$

Ici on trouve

$$\begin{vmatrix}
1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\
1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\
1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\
1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\
1 & e & e^2 & e^3 & e^4
\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}
1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\
t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\
u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\
v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4
\end{vmatrix} \times (b-a)(c-a)(c-b)(e-d),$$

où

Par conséquent on a

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (d-a)(d-b \\ (e-a)\;(e-b \end{matrix}$$

et en prenant

$$\lim a = \lim b = \lim c = x_1,$$
$$\lim e = \lim d = x_2,$$

on trouve maintenant à l'aide de la formule (7)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 \\ 0 & 0 & 2 & 2.3x_1 & 3.4x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 4x_2^3 \end{vmatrix} = 2(x_2$$

V.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., IX, 1882, 106—

Eenige opmerkingen omtrent de differentiaalquot
van eene functie van één veranderlijke.

Is eene functie $f(x)$ voor alle waarden van x, $a \leqq x \leqq b$, ge
voor al deze waarden van x differentieerbaar, dan is

$$\text{(A)} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

$$(a < \xi < b)$$

Hieruit volgt, wanneer a en b tot een limiet X converg
$f'(x)$ continu is voor $x = \mathrm{X}$,

$$\text{(B)} \quad \operatorname{Lim} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\mathrm{X}).$$

Dat voor de geldigheid van deze formule (B) de voorwa
$f'(x)$ voor $x = \mathrm{X}$ continu is, noodzakelijk is, blijkt uit het
voorbeeld. Zij $f(0) = 0$ en voor $x \gtrless 0$

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right).$$

De functie $f(x)$ is dan continu en differentieerbaar
waarden van x; in het bijzonder is $f'(0) = 0$. Daarentege
niet overal continu, en namelijk discontinu voor $x = 0$.

Neemt nu n in 't oneindige toe, dan convergee
en toch convergeert

$$\frac{f(p_n)-f(p_{n+1})}{p_n-p_{n+1}}$$

niet tot de waarde $f'(0)=0$.

Men overtuigt zich zelfs gemakkelijk er van
positief getal h ook gegeven is, men steeds tw
p en q, beide kleiner dan h, kan bepalen, zoodar

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}$$

eene willekeurig voorgeschreven waarde aannee
sprake zijn van de convergentie van deze uitd
paalde limiet.

Wordt dus omtrent de wijze, waarop a en
convergeeren, niets anders bepaald, dan is
waarde, dat $f'(x)$ voor $x=X$ continu is, nood
digheid van (B).

Zoodra echter vastgesteld wordt, dat a en
limiet X convergeeren, dat X steeds tusschen
minste niet buiten het interval a, b valt, dan
reeds, zoodra slechts $f(x)$ voor $x=X$ een eindig
$f'(X)$ heeft. Het is dan zelfs niet noodig, dat $f(x$
van x differentieerbaar is.

Om dit te bewijzen heeft men niet van (A
formule de differentieerbaarheid van $f(x)$ voor
onderstelt, maar men kan uitgaan van de identi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(X)+f(X)-}{b-X+X-a}$$

Ligt nu X in het interval a, b, dan hebben

welke beide waarden volgens de onderstelling, dat $f(x)$ voor $x = X$ een eindig differentiaalquotiënt heeft, tot $f(X)$ convergeeren; derhalve ook $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Het is duidelijk, dat a of b ook gelijk X mogen worden.

Als een voorbeeld kan de functie $f(x)$ dienen, bepaald door $f(0) = 0$ en voor $x \gtrless 0$, door $f(x) = \pm x^2$ waarin het bovenste of onderste teeken te nemen is, naargelang x meetbaar of onmeetbaar is. Deze functie heeft alleen voor $x = 0$ een differentiaalquotiënt, waarvan de waarde door de formule (B) gevonden kan worden, zoolang nul niet buiten het interval a, b valt.

De formule (A) vormt een bijzonder geval van de volgende meer algemeene, waarvan ik het bewijs elders[1]) gegeven heb.

Zij

$$r(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_{n+1}),$$
$$(x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n < x_{n+1})$$

laten $f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ continu zijn voor alle waarden van x, $x_1 \leqq x \leqq x_{n+1}$, terwijl voor deze zelfde waarden $f^{(n-1)}(x)$ een eindig differentiaalquotiënt $f^{(n)}(x)$ heeft; dan is

$$(AA) \quad \dots \quad \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(\xi).$$
$$(x_1 < \xi < x_{n+1})$$

Hieruit volgt, wanneer $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ tot eene gemeenschappelijke limiet X convergeeren, en bovendien nog $f^{(n)}(x)$ voor $x = X$ continu is,

$$(BB) \quad \dots \quad \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^{(n)}(X).$$

Wij zagen reeds boven in het bijzonder geval $n = 1$, dat in het algemeen de voorwaarde omtrent de continuiteit van $f^{(n)}(x)$ nood-

vang; en wel is het dan voldoende, dat $f^{(n-1)}(x)$ v waarde $x = \mathrm{X}$ een eindig differentiaalquotiënt $f^{(n)}$ (X is zelfs niet noodig, dat $f^{(n-1)}(x)$ voor andere waard tieerbaar is, laat staan dan een continu differentia zooals boven ondersteld moest worden.

Het bewijs hiervan, dat het eigenlijke doel van uitmaakt, kan aldus gevoerd worden.

Zij

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{1.2.3\ldots n} x^n,$$

dan zijn ook

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x),$$

volkomen bepaald, en $\varphi^{(n-1)}(x)$ heeft voor $x = \mathrm{X}$ ee tiaalquotiënt $\varphi^{(n)}(\mathrm{X}) = 0$. In het voorbijgaan zij op de onderstelling, voor $x = \mathrm{X}$ is $f^{(n-1)}(x)$ differentieer $f^{(n-1)}(x)$ is voor $x = \mathrm{X}$ continu.

Ik stel nu

$$p(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n),$$
$$q(z) = (z - x_2)(z - x_3)\ldots(z - x_{n+1}),$$

dan is volgens (AA), wanneer men in deze form vervangt,

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x_p)}{p'(x_p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \varphi^{(n-1)}$$
$$(x_1 < \xi < x_n),$$

$$\sum_{p=2}^{p=n+1} \frac{\varphi(x_p)}{q'(x_p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \varphi^{(n-1)}$$
$$(x_2 < \eta < x_{n+1})$$

en wel vereischen deze formules geenerlei onderste differentieerbaarheid van $\varphi^{(n-1)}(x)$.

$$\left(\frac{\eta - X}{x_{n+1} - x_1}\right) \cdot \frac{\varphi^{(n-1)}(\eta) - \varphi^{(n-1)}(X)}{\eta - X} + \left(\frac{X - \xi}{x_{n+1} - x_1}\right) \cdot \frac{\varphi^{(n-1)}(X) - \varphi^{(n-1)}(\xi)}{X - \xi}.$$

Daar ξ en η binnen het interval x_1, x_{n+1} liggen, en X ten minst niet buiten dit interval ligt, zoo zijn

$$\frac{\eta - X}{x_{n+1} - x_1} \text{ en } \frac{X - \xi}{x_{n+1} - x_1},$$

volstrekt genomen, kleiner dan één. Verder volgt uit de onderstelling dat $\varphi^{(n-1)}(x)$ voor $x = X$ een eindig differentiaalquotiënt $\varphi^{(n)}(X) =$ heeft, dat

$$\frac{\varphi^{(n-1)}(\eta) - \varphi^{(n-1)}(X)}{\eta - X} \text{ en } \frac{\varphi^{(n-1)}(X) - \varphi^{(n-1)}(\xi)}{X - \xi}$$

tot de limiet nul convergeeren, wanneer $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ allen tot hun limiet X convergeeren. Dus volgt ten slotte

$$\lim \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{\varphi(x_p)}{r'(x_p)} = 0,$$

of, daar

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{1.2.3\ldots n} x^n$$

was en men identiek heeft

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{x_p^n}{r'(x_p)} = 1,$$

$$\lim \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{k}{1.2.3\ldots n} = \frac{f^{(n)}(X)}{1.2.3\ldots n},$$

waarmee het bedoelde bewijs geleverd is.

Men kan zeggen, dat deze formule altijd geldt, zoodra slechts $f^{(n)}(X$ eene bepaalde beteekenis heeft, want dit vordert reeds vanzelf, da $f^{(n-1)}(x)$ in de nabijheid van $x = X$ overal eene eindige en continu veranderlijke waarde heeft; even zoo wat $f^{(n-2)}(\ )$, $f^{(n-3)}(x)$, .. betreft

bestaat. Dit blijkt, wanneer men bedenkt, dat d
de waarde van $f(x)$ voor $x = X$ de bovenstaande
waarde verandert, zoolang geen der waarden x_1
aan X is.

Ligt X buiten het interval x_1, x_{n+1}, dan behoe

$$\frac{\eta - X}{x_1 - x_{n+1}} \text{ en } \frac{X - \xi}{x_1 - x_{n+1}},$$

geen echte breuken meer te zijn, en deze omsta
het bewijs ten einde te voeren. Maar wij zagen
beeld, dat in dit geval omtrent $f^{(n-1)}(x)$ verdere on
zijn, namelijk, dat in het algemeen $f^{(n)}(x)$ best
continu is.

V.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., IX, 1882, 106—111.)

(traduction)

Quelques remarques à propos des dérivées d'une fonction d'une seule variable.

Lorsqu'une fonction $f(x)$ est donnée pour toutes les valeurs de pour lesquelles $a \leqq x \leqq b$, et qu'elle peut être différentiée pour toute ces valeurs de x, on a

$$\text{A)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$
$$(a<\xi<b)$$

Il s'ensuit que lorsque a et b tendent vers une limite X et que l fonction $f'(x)$ est continue pour $x = \mathrm{X}$,

$$\text{B)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \lim \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\mathrm{X}).$$

L'exemple suivant fait voir que la condition, d'après laquelle l fonction $f'(x)$ est continue pour $x=\mathrm{X}$, doit nécessairement êtr remplie pour que la formule (B) soit valable.

Exemple. Soit $f(x)=0$, et pour $x \gtrless 0$

$$f(x)=x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right).$$

La fonction $f(x)$ est alors continue et peut être différentiée pou

il s'ensuit que

$$\frac{f(p_n)-f(p_{n+1})}{p_n-p_{n+1}}=(-1)^n\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)(V$$

Lorsque n tend vers l'infini, p_n converge vers la
dant l'expression

$$\frac{f(p_n)-f(p_{n+1})}{p_n-p_{n+1}}$$

ne tend pas vers la valeur $f'(0)=0$.

On se convainc même aisémenc de ce que, que
un nombre donné h, on peut toujours trouver deu
p et q, inférieurs à h, tels que l'expression

$$\frac{f(p)-f(q)}{p-q}$$

prend une valeur quelconque donnée. Il ne peut
d'une convergence de cette expression vers une limi

Nous avons dit que la condition nommée, d'après
$f'(x)$ est continue pour $x=X$, doit nécessairement
que la formule (B) soit valable, dans l'hypothèse
laquelle a et b tendent vers leur limite X est incon

Mais dès qu'on admet que a et b tendent vers leu
manière que X reste constamment entre a et b, ou c
pas en dehors de l'intervalle a, b, la formule (B)
$f(x)$ a pour $x=X$ une dérivée finie $f'(X)$. Dans ce ca
nécessaire que $f(x)$ possède une dérivée pour d'a

Pour le démontrer il n'est pas nécessaire de part
qui suppose que la fonction $f(x)$ peut être différent
valeurs de x pour lesquelles $a \leqq x \leqq b$, on peut
comme suit.

Nous avons

a une valeur intermédiaire entre

$$\frac{f(b)-f(X)}{b-X} \quad \text{et} \quad \frac{f(X)-f(a)}{X-a},$$

deux expressions qui tendent vers $f'(X)$ dans l'hypothèse que $f(x)$ a pour $x=X$ une dérivée finie; il en est donc de même pour $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Il est évident que les grandeurs a et b peuvent aussi, l'une ou l'autre, devenir égales à X.

Nous pouvons prendre pour exemple la fonction $f(x)$, déterminée par $f(0)=0$ et par $f(x)=\pm x^2$ pour $x \gtrless 0$. Il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur selon que x est rationnel ou non. Cette fonction ne possède une dérivée que pour $x=0$, dérivée dont on peut trouver la valeur par la formule (B), tant que zéro ne tombe pas en dehors de l'intervalle a, b.

La formule (A) constitue un cas particulier de la formule suivante plus générale, dont j'ai donné la démonstration ailleurs.[1])

Soit

$$r(z)=(z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_{n+1}),$$
$$(x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n < x_{n+1})$$

et supposons les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ continues pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $x_1 \leqq x \leqq x_{n+1}$ tandis que $f^{(n-1)}(x)$ a pour ces mêmes valeurs une dérivée finie $f^{(n)}(x)$. Nous avons alors

$$\text{(AA)} \quad \dots \quad \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(\xi).$$
$$(x_1 < \xi < x_{n+1})$$

Il s'ensuit que lorsque $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ tendent vers une limite commune X et que de plus la fonction $f^{(n)}(x)$ est continue pour $x=X$

Nous avons déjà vu plus haut dans le cas pa
général la condition relative à la continuité de $f^{(n)}$

Mais si l'on suppose qu'en convergeant vers X
x_{n+1} sont l'une supérieure l'autre inférieure à X
ne tombe pas en dehors de l'intervalle x_1, x_{n+}
une signification bien plus générale: il suffit alo
valable que la fonction $f^{(n-1)}(x)$ ait pour la valeu
une dérivée finie $f^{(n)}(\mathrm{X}) = k$ Il n'est pas même néc
ait une dérivée pour d'autres valeurs de x, moi
fonction ait une dérivée continue, comme nous
plus haut.

La preuve de cette affirmation qui constitue le
communication, peut être donnée comme suit.

Soit

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{1.2\ldots n} x^n,$$

alors

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(x)$$

sont elles aussi complètement déterminées et $\varphi^{(}$
$x = \mathrm{X}$ une dérivée finie $\varphi^{(n)}(\mathrm{X}) = 0$. Je remar
l'hypothèse d'après laquelle $f^{(n-1)}(x)$ peut être diff
permet déjà de conclure que la fonction $f^{(n-1)}(x)$ est

Je pose maintenant

$$p(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x$$
$$q(z) = (z - x_2)(z - x_3)\ldots(z - x$$

On a alors d'après la formule (AA), lorsqu'on y r

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x_p)}{p'(x_p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \varphi^{(n}$$

$$(x_1 < \xi < x_n)$$

On trouve maintenant en soustrayant et en divisant par $x_{n+1}-x_1$

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{\varphi(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left\{ \frac{\varphi^{(n-1)}(\eta) - \varphi^{(n-1)}(\xi)}{x_{n+1}-x_1} \right\}$$

L'expression entre parenthèses qui figure au second membre peu être remplacée par

$$\left(\frac{\eta - X}{x_{n+1}-x_1}\right)\cdot\frac{\varphi^{(n-1)}(\eta)-\varphi^{(n-1)}(X)}{\eta - X} + \left(\frac{X-\xi}{x_{n+1}-x_1}\right)\cdot\frac{\varphi^{(n-1)}(X)-\varphi^{(n-1)}(\xi)}{X-\xi}.$$

Comme les grandeurs ξ et η sont situées dans l'intervalle x_1, x_{n+1} et que X n'est certainement pas en-dehors de cet intervalle, les expressions

$$\frac{\eta - X}{x_{n+1}-x_1} \text{ et } \frac{X-\xi}{x_{n+1}-x_1}$$

sont, en valeur absolue, inférieures à l'unité. De plus l'hypothès d'après laquelle $\varphi^{(n-1)}(x)$ possède pour $x = X$ une dérivée fini $\varphi^{(n)}(X) = 0$, nous permet de conclure que les expressions

$$\frac{\varphi^{(n-1)}(\eta)-\varphi^{(n-1)}(X)}{\eta - X} \text{ et } \frac{\varphi^{(n-1)}(X)-\varphi^{(n-1)}(\xi)}{X-\xi}$$

convergent vers la limite zéro, lorsque les grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n+}$ tendent toutes vers leur limite X. On trouve donc enfin

$$\lim \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{\varphi(x_p)}{r'(x_p)} = 0,$$

mais, comme on a

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{k}{1.2.3\ldots n} x^n$$

et, identiquement

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{x_p^n}{r'(x_p)} = 1$$

fonction $f^{(n-1)}(x)$ a alors partout dans le voisinage d
finie et continue, et qu'il en est de même pour $f^{(n-2)}$

Mais on ne peut pas affirmer réciproquement qu

$$\lim \sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)}$$

a une valeur finie déterminée, cette valeur est $\frac{f^{(}}{1.2}$
fort bien arriver que même alors $f^{(n)}(X)$ n'existe
remarquant que lorsqu'on substitue $x = X$ dans $f(x$
ci-dessus garde la même valeur, tant qu'aucu
$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ n'est égale à X.

Lorsque X est en-dehors de l'intervalle x_1, x_{n+}

$$\frac{\eta - X}{x_1 - x_{n+1}} \text{ et } \frac{X - \xi}{x_1 - x_{n+1}}$$

ne sont pas nécessairement des fractions inférieure
circonstance, lorsqu'elle se présente, nous emp
la démonstration à sa fin. Mais nous avons déjà
que dans ce cas de nouvelles hypothèses relativ
nécessaires: il faut supposer alors en général que
cette fonction est continue pour $x = X$.

VI.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., IX, 1882, 98—106.)

Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen.

1. In het 89ste deel van het Journal für die reine und angewandt Mathematik, p. 242—244, geeft de heer G. Frobenius in een kor opstel, Über die Leibnizsche Reihe, een theorema, dat aldaar ter slotte onder den volgenden vorm uitgesproken wordt.

„Ist s_n eine von n abhängige Grösse, und nähert sich

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}$$

bei wachsendem n einer bestimmten endlichen Grenze, so nähert sich

$$(1 - x)(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \ldots)$$

falls x beständig zunehmend gegen Eins convergirt, derselben Grenze."

Dit theorema vertoont eenige analogie met een ander, dat mij seder lang bekend was en waarvan de waarheid, naar het mij toeschijnt bij eenig nadenken van zelf duidelijk is; reden, waarom ik indertijd het volledig uitwerken van een streng bewijs naliet. Het stukje van den heer Frobenius geeft mij nu echter aanleiding, het hierop betrekking hebbende eenigzins te ontwikkelen, en er eenige opmerkingen aan toe te voegen; waarbij het blijkt, dat men algemeener kan

wanneer x steeds toenemend tot de limiet 1 conv
limiet convergeert als

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} \text{ voor } n = \infty$$

De vorm van het bewijs van Frobenius sch
wenschen over te laten, en ik heb daarom niet
geheel te volgen.

2. Het boven bedoelde theorema bestaat in
$a_0, a_1, a_2, \ldots$ alle positief, of ten minste niet neg
de reeks

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

voor alle waarden $0 < x < 1$, maar divergeert d
dan volgt hieruit van zelf, dat $\psi(x)$ boven al
wanneer x, steeds toenemend, tot 1 convergeert

$$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

eene onbepaald voortloopende rij getallen, die t
vergeeren[1]), dan is het duidelijk, dat ook de ree

$$f(x) = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \ldots$$

voor alle waarden $0 < x < 1$ convergeert.

In deze onderstellingen nu bestaat de te
hierin, dat

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}$$

tot de limiet M convergeert, terwijl x steeds to
heid nadert.

De omtrent de rij getallen

$$s_0, s_1, s_2, \ldots$$

gemaakte onderstelling heeft dezen zin: hoe kl
ε ook gegeven is, het is altijd mogelijk ...

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad s_{n+k} = M + \varepsilon_k, \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

le volstrekte waarden van

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots$$

lle kleiner dan ε zijn.

Zij nu

$$2) \quad \ldots \quad \begin{cases} P = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} s_{n-1} x^{n-1}, \\ Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1}, \end{cases}$$

lan volgt, met behulp van (1),

$$(x) = P + a_n x^n (M + \varepsilon_0) + a_{n+1} x^{n+1} (M + \varepsilon_1) + a_{n+2} x^{n+2} (M + \varepsilon_2) + \ldots$$

oodat $f(x)$ eene waarde heeft, gelegen tusschen

$$P + (M + \varepsilon)(\psi(x) - Q)$$

n

$$P + (M - \varepsilon)(\psi(x) - Q),$$

vaaruit volgt, dat $f(x) : \psi(x)$ ligt tusschen

$$M + \varepsilon + \frac{P - Q(M + \varepsilon)}{\psi(x)}$$

n

$$M - \varepsilon + \frac{P - Q(M - \varepsilon)}{\psi(x)}.$$

Wanneer nu x tot 1 convergeert, convergeeren P en Q tot zeker eindige limieten, terwijl volgens de onderstelling, $\psi(x)$ boven all grenzen toeneemt. Men zal dus x kleiner dan 1, maar zoo dicht bi 1 kunnen nemen, dat de volstrekte waarden van

$$\frac{P - Q(M + \varepsilon)}{\psi(x)} \quad \text{en} \quad \frac{P - Q(M - \varepsilon)}{\psi(x)}$$

kleiner zijn dan een geheel willekeurig gegeven positief getal δ, e kleiner dan δ blijven, wanneer x nog dichter bij 1 genomen wordt.

twee positieve getallen $\beta = \delta + \varepsilon$. Bij de waarde
evenals boven; namelijk men neme n zoo groot
gesteld zijnde, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ volstrekt genomen alle
Nadat dus n en daarmee ook P en Q bekend zij
door de voorwaarde, dat de volstrekte waarden v

$$\frac{P - Q(M + \varepsilon)}{\psi(x)} \text{ en } \frac{P - Q(M - \varepsilon)}{\psi(x)}$$

voor alle waarden $1 - a \leqq x < 1$, kleiner dan δ bli
Volgens het bovenstaande ligt dan, voor deze

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}$$

tusschen $M + \varepsilon + \delta$ en $M - \varepsilon - \delta$, d. w. z. tusscher
Het is duidelijk, dat de onderstelling dat $\psi(x)$ e
gerangschikt volgens de geheele opklimmende
de bovenstaande afleiding eigenlijk geene rol
uitkomst gemakkelijk in een algemeener vorm ui
den. Hierbij moet echter opgemerkt worden, da
van de redeneering hierin bestaat, dat $s_n, s_{n+1}, \ldots$
veranderlijke x afhangen, zoodat de bepaling va
kelijk is van de bijzondere waarden, die men la
toe te schrijven.

3. Als een voorbeeld van de bruikbaarheid va
rema kan de hypergeometrische reeks dienen

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + \ldots}{1 . 2 , \gamma(\gamma + 1 \ldots}$$

Hierbij komen dus alleen die gevallen in aan
reeks voor $x = 1$ divergeert.

2) De termen nemen boven alle grenzen toe, wanneer
positief is.

3) De termen convergeeren tot eene eindige, van 0
limiet, wanneer $\alpha+\beta-\gamma-1=0$.

4) De termen convergeeren tot nul, wanneer $\alpha+\beta$ -
tief is.

5) De reeks convergeert voor $x=1$, wanneer $\alpha+\beta$
divergeert, wanneer $\alpha+\beta-\gamma\geqq 0$ is.

Volgens 3) convergeert de uitdrukking

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n\ldots\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

waarin $\alpha+\beta-\gamma-1=0$, voor $n=\infty$, tot eene eindige
limiet gelijk is aan

$$\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}.$$

Iets algemeener vindt men voor $\alpha+\beta-\gamma-u=0$

$$(3)\ .\ \lim_{n=\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}=\frac{\Pi(u}{\Pi(\alpha}$$

en wel volgt dit onmiddellijk uit de definitie van $\Pi(z)$:

$$\Pi(z)=\lim_{n=\infty}\frac{1.2.3\ldots n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\,n^z.$$

Daar alleen de gevallen, waarin de reeks voor $x=1$ di
beschouwd worden, zoo ziet men uit 5), dat $\alpha+\beta-\gamma\geqq$
moet worden. De gevallen $\alpha+\beta-\gamma>0$ en $\alpha+\beta-\gamma$
afzonderlijk behandeld worden.

I. $$\alpha+\beta-\gamma>0.$$

Dan is dus $u=\alpha+\beta-\gamma$ positief; neemt men nu,
meene theorema

$$s_0=1,\quad s_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n}{u(u+1)\ldots(u+n-1)\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n}$$

$$a_0=1,\quad a_n=\frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{1.2.3\ldots n};$$

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = (1-x)^{-}$$
$$f(x) = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 \ldots = \mathrm{F}(\alpha, \beta,$$

en volgens (3)

$$\lim_{n=\infty} s_n = \mathrm{M} = \frac{\Pi(u-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}$$

zoodat men onmiddellijk verkrijgt

$$(4) \quad . \quad \lim_{x=1} (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}\,\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma}{\Pi(\alpha-1}$$

II. $\alpha + \beta - \gamma = 0.$

Neemt men, om dit geval te behandelen

$$s_0 = \frac{1}{\alpha}, \qquad s_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)\,\beta(\beta+1)\ldots}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+}$$

$$a_0 = \alpha, \qquad a_n = \frac{\alpha}{n+1};$$

dan is

$$\psi(x) = \alpha + \frac{1}{2}\alpha x + \frac{1}{3}\alpha x^2 + \ldots = \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{l}$$

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta-}{\alpha\Pi(\alpha-1)\,\Pi(}$$

en na eene kleine herleiding

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{x=1} \frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x)}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta-}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta}$$

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, d uitgedrukte eigenschappen ook onmiddellijk uit leiding der F-funktie volgen. De formule (4) is met de formulen [82] op p. 209 en formule Gauss' Werke, Bd. III, terwijl de formule (5) o formule [28], p. 217.

$$\frac{(a+n-1)(\alpha_1+n-1)\dots(\alpha_k+n-1)}{n(\beta_1+n-1)\dots(\beta_k+n-1)}\,x,$$

dan vindt men voor

$$u = a+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k-\beta_1-\beta_2-\dots-\beta_k >$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^u\,\mathrm{F}(x) = \frac{\Pi(u-1)\,\Pi(\beta_1-1)\,\Pi(\beta_2-1)\dots\Pi(}{\Pi(a-1)\,\Pi(\alpha_1-1)\,\Pi(\alpha_2-1)\dots\Pi(}$$

en wanneer

$$a+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k-\beta_1-\beta_2-\dots-\beta_k=$$

is,

$$\lim_{x=1}\frac{\mathrm{F}(x)}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{\Pi(\beta_1-1)\,\Pi(\beta_2-1)\dots\Pi(\alpha_k-}{\Pi(a-1)\,\Pi(\alpha_1-1)\dots\Pi(\beta_k-}$$

4. Neemt men in het theorema van art. 2 voor de f
het bijzonder

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots,$$

zoodat

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1,$$

dan volgt dus

$$\lim_{x=1}(1-x)\{s_0+s_1x+s_2x^2+\dots\} = \mathrm{M},$$

$$\lim_{n=\infty} s_n = \mathrm{M}.$$

Het theorema, in art. 1 vermeld, is blijkbaar alge
wanneer $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \mathrm{M}$ is, zoo ziet men gemakkelijk, dat hi

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\dots+s_{n-1}}{n} = \mathrm{M},$$

terwijl men uit dit laatste niet omgekeerd tot $\lim\limits_{n=\infty} s_n = \mathrm{M}$ k

Deze omstandigheid gaf aanleiding om te onderzoeken

$$\psi(x) = (1-x)^{-u} = 1 + \frac{u}{1}x + \frac{u(u+1)}{1.2}$$

$$(u > 0)$$

en voor

$$\psi(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \ldots$$

Het bewijs zal hier alleen voor $\psi(x) = (1-x)$

daar het bewijs voor

$$\psi(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

hierna geen bezwaar zal opleveren.

Uit de onderstelling, dat

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} = \mathrm{M},$$

volgt, dat hoe klein een positief getal ε ook ge

mogelijk is een geheel positief getal n zoo groot

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n+k-1}}{n+k} = \mathrm{M} + \varepsilon$$

$$(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

de getallen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ alle, volstrekt genomen

Zij nu verder

$$(7) \begin{cases} \mathrm{P} = s_0 + \dfrac{u}{1}s_1 x + \dfrac{u(u+1)}{1.2}s_2 x^2 + \ldots + \dfrac{u(u+1)\ldots}{1.2.3} \\ \mathrm{Q} = 1 + \dfrac{u}{1}x + \dfrac{u(u+1)}{1.2}x^2 + \ldots + \dfrac{u(u+1)\ldots}{1.2.3\ldots} \end{cases}$$

terwijl ik er aan herinner, dat

$$f(x) = s_0 + \frac{u}{1}s_1 x + \frac{u(u+1)}{1.2}s_2 x^2 + \ldots$$

$$\psi(x) = 1 + \frac{u}{1}x + \frac{u(u+1)}{1.2}x^2 + \ldots =$$

convergeert. Met behulp van (7) en (8) kan men nu $f(x)$ aldus voorstellen.

$$
(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x) = \mathrm{P} + \mathrm{M}\{(1-x)^{-u} - \mathrm{Q}\} - n(u)_n \varepsilon_0 x^n + \mathrm{R} + \mathrm{S}, \\ & \mathrm{R} = u(1-x) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u+1)_{n+k-1} \varepsilon_k x^{n+k-1}, \\ & \mathrm{S} = (1-u) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u)_{n+k-1} \varepsilon_k x^{n+k-1}. \end{aligned} \right.
$$

Hierin is ter bekorting door $(u)_p$ de coëfficient van x^p in de ontwikkeling van $(1-x)^{-u}$ aangeduid, dus

$$
(u)_p = \frac{u(u+1)\ldots(u+p-1)}{1.2.3\ldots p}.
$$

Daar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ alle, volstrekt genomen, kleiner dan ε zijn, zoo is de volstrekte waarde van R kleiner dan

$$
\varepsilon u(1-x) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u+1)_{n+k-1} x^{n+k-1},
$$

en evenzoo de volstrekte waarde van S kleiner dan

$$
\pm \varepsilon(1-u) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u)_{n+k-1} x^{n+k-1}.
$$

A fortiori zijn dus de volstrekte waarden van R en S respectievelijk kleiner dan

$$
\varepsilon u(1-x) \sum_{k=0}^{k=\infty} (u+1)_k x^k = \varepsilon u(1-x)^{-u}
$$

en

$$
\pm \varepsilon(1-u) \sum_{k=0}^{k=\infty} (u)_k x^k = \pm \varepsilon(1-u)(1-x)^{-u}.
$$

Stelt men dus

Uit (9) volgt dus nu, door vermenigvuldiging met

(11) . $(1-x)^u f(x) = M + \{P - MQ - n\,(u)_n \varepsilon_0 x^n\}\,(1$

De functie $P - MQ - n\,(u)_n \varepsilon_0 x^n$ is geheel rationa
voor $x = 1$ noodzakelijk eene eindige waarde aan, z

$$\{P - MQ - n\,(u)_n \varepsilon_0 x^n\}\,(1-x)^u,$$

daar u positief is, stellig tot nul convergeert, wann
nemend, onbepaald tot de eenheid nadert. Men k
eene positieve grootheid δ ook gegeven is, altijd
α bepalen zoodanig, dat voor alle waarden van
$1 - \alpha \leqq x < 1$ de volstrekte waarde van

$$\{P - MQ - n\,(u)_n \varepsilon_0 x^n\}\,(1-x)^u$$

kleiner dan δ is.

Het valt nu uit (11) gemakkelijk op te make
$(1-x)^u f(x)$, bij onbeperkte nadering van x tot 1
convergeert, m. a. w. dat, hoe klein β ook gegeve
zoo kan bepalen, dat voor alle waarden van
$1 - \alpha \leqq x < 1$ de waarde van $(1-x)^u f(x)$ minder van
Inderdaad, men neme twee positieve getallen δ en ε

$$\beta = \delta + t\,\varepsilon.$$

Bij de waarde van ε bepale men nu n zóó, dat
$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ in (6) allen volstrekt kleiner dan ε uitva
n, en daarmee ook P en Q, bekend zijn, bepale
voorwaarde, dat, wanneer x niet meer dan α van 1

$$\{P - MQ - n\,(u)_n \varepsilon_0 x^n\}\,(1-x)^u$$

volstrekt kleiner dan δ is. Volgens (11) ligt dan v
van x het product $(1-x)^u f(x)$ tusschen de grenz
$M - \delta - t\varepsilon$, d.i. tusschen $M + \beta$ en $M - \beta$.

VI.

(Amsterdam, Nieuw Arch Wisk , IX, 1882, 98—106.)

(traduction)

A propos de quelques théorèmes concernant les séries infinies

1. Dans le 89ième tome du Journal für die reine und angewandte Mathematik, p 242—244, M. G. Frobenius publie dans un court article Ueber die Leibnizsche Reihe un théorème auquel il donne finalement la forme suivante:

„Si s_n est une fonction de n et que l'expression

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n}$$

tend vers une limite déterminée et finie lorsque n augmente, l'expression

$$(1 - x)(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \ldots)$$

tend vers la même limite lorsque la valeur de x tend vers l'unité en croissant continuellement."

Ce théorème montre une certaine analogie avec un autre théorème qui m'était connue depuis longtemps et dont la vérité, à ce qu'il me paraît, s'impose pour peu qu'on y réfléchisse; pour cette raison je m'étais abstenu autrefois d'en chercher une démonstration achevée et rigoureuse Cependant, l'article de M. Frobenius me fournit maintenant l'occasion de développer quelque peu mes idées à ce sujet et d'y ajouter quelques remarques qui font voir qu'on peut dire géné

lorsque x tend vers l'unité en augmentant contin
vers la même limite que l'expression

$$\frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} \text{ pour } n = \infty .$$

Il me semble que la forme de la démonstratio
laisse rien à désirer; c'est pourquoi je n'ai pas
entièrement sous ce rapport.

2. Le théorème dont je parlais est le suivant.
grandeurs $a_0, a_1, a_2 \ldots$ soient toutes positives ou
tives et que la série

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

converge pour toutes les valeurs de x, telles qu
qu'elle diverge pour $x = 1$.

On en conclut aisément que la valeur de $\psi(x$
de toute limite lorsque x tend vers 1 en croissant.

$$s_0, \; s_1, \; s_2, \; \ldots$$

représentent une série illimitée de nombres con
limite M [1]), il est évident que la série

$$f(x) = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \ldots$$

converge elle-aussi pour toutes les valeurs de x, te

Or dans ces hypothèses la propriété qu'il s'
consiste en ce que l'expression

$$\frac{f(x)}{\psi(x)}$$

tend vers la limite M, lorsque x tend vers l'un
continuellement.

L'hypothèse faite à-propos de la série de nom

$$s_0, \; s_1, \; s_2, \; \ldots$$

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad s_{n+k} = \mathrm{M} + \varepsilon_k, \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

les nombres

$$\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots$$

sont tous inférieurs à ε en valeur absolue.

Posons

$$(2) \quad \ldots \quad \begin{cases} \mathrm{P} = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} s_n \\ \mathrm{Q} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} x^n \end{cases}$$

On a alors, en faisant usage de l'équation (1),

$$f(x) = \mathrm{P} + a_n x^n (\mathrm{M} + \varepsilon_0) + a_{n+1} x^{n+1} (\mathrm{M} + \varepsilon_1) + a_{n+2} x^n$$

Il s'ensuit que $f(x)$ a une valeur intermédiaire entre

$$\mathrm{P} + (\mathrm{M} + \varepsilon)\,[\psi(x) - \mathrm{Q}]$$

et

$$\mathrm{P} + (\mathrm{M} - \varepsilon)\,[\psi(x) - \mathrm{Q}],$$

d'où l'on conclut que $\dfrac{f(x)}{\psi(x)}$ a une valeur intermédiaire

$$\mathrm{M} + \varepsilon + \frac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}(\mathrm{M} + \varepsilon)}{\psi(x)}$$

et

$$\mathrm{M} - \varepsilon + \frac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}(\mathrm{M} - \varepsilon)}{\psi(x)}.$$

Or, lorsque x tend vers 1, P et Q tendent vers finies, tandis que $\psi(x)$, d'après notre hypothèse, augm toute limite. Il sera donc possible de prendre po inférieure à 1 et si peu différente de 1 qu'en va expressions

$$\frac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}(\mathrm{M} + \varepsilon)}{\psi(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{P} - \mathrm{Q}(\mathrm{M} - \varepsilon)}{\psi(x)}$$

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = (1-x)^{-u}$$
$$f(x) = a_0 s_0 + a_1 s_1 x + a_2 s_2 x^2 + \ldots = \mathrm{F}(\alpha, \beta,$$

et d'après (3)

$$\lim_{n=\infty} s_n = \mathrm{M} = \frac{\Pi(u-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)},$$

de sorte qu'on obtient immédiatement

(4) . . $\lim_{x=1} (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}\,\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma}{\Pi(\alpha-1)}$

II. $\alpha + \beta - \gamma = 0.$

Si l'on pose, pour traiter ce cas,

$$s_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad s_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n}$$

$$a_0 = \alpha, \quad a_n = \frac{\alpha}{n+1},$$

il en résulte

$$\psi(x) = \alpha + \frac{1}{2}\alpha x + \frac{1}{3}\alpha x^2 + \ldots = \frac{\alpha}{x}\log\Big(\frac{}{1}$$

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\alpha\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-}$$

Et après une petite réduction on obtient

(5) . . . . $\lim_{x=1} \frac{\mathrm{F}(\alpha, \beta, \alpha+\beta, x)}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-}$

Il est presque superflu de dire que les propriét
(4) et (5) peuvent aussi être déduites immédiatemen
la transformation de la fonction F. La formule (4) s
formules [82], p. 209 et [48], p. 147 des Oeuvres de
tandis que la formule (5) est une conséquence imm
mule [28], p. 217.

$$\frac{(\alpha+n-1)(\alpha_1+n-1)\ldots(\alpha_k+n-1)}{n(\beta_1+n-1)\ldots(\beta_k+n-1)}x,$$

on trouve pour

$$u=\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_k>0$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^u F(x)=\frac{\Pi(u-1)\Pi(\beta_1-1)\Pi(\beta_2-1)\ldots\Pi(\beta_k-}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\alpha_1-1)\Pi(\alpha_2-1)\ldots\Pi(\alpha_k-}$$

et pour

$$\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k-\beta_1-\beta_2-\ldots-\beta_k=0$$

$$\lim_{x=1}\frac{F(x)}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)}=\frac{\Pi(\beta_1-1)\Pi(\beta_2-1)\ldots\Pi(\beta_k-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\alpha_1-1)\ldots\Pi(\alpha_k-1)}.$$

4. Si dans le théorème du n^0 2 on donne à $\psi(x)$ la form

$$\psi(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots,$$

de sorte que

$$a_0=a_1=a_2=\ldots=a_n=1,$$

il s'ensuit que

$$\lim_{x=1}(1-x)\{s_0+s_1x+s_2x^2+\ldots\}=M,$$

$$\lim_{n=\infty}s_n=M.$$

Le théorème énoncé au n^0 1 est évidemment plus gé pour $\lim\limits_{n=\infty}s_n=M$ on peut en tirer, comme cela se voit aisé

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_0+s_1+\ldots+s_{n-1}}{n}=M,$$

tandis qu'il n'est pas possible de tirer réciproquement de nière équation la formule $\lim\limits_{n=\infty}s_n=M$.

Cette circonstance m'induisit à examiner si d'autres h

$$\psi(x) = (1-x)^{-u} = 1 + \frac{u}{1} x + \frac{u(u+1)}{1 . 2}$$
$$(u > 0)$$

et

$$\psi(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 + \ldots$$

Je ne donnerai la démonstration que pour $\psi(x) =$ que la démonstration pour

$$\psi(x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

n'offre ensuite aucune difficulté.

De l'hypothèse

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n} = \mathrm{M},$$

on déduit qu'il est toujours possible, quelque nombre positif donné ε, de prendre un nombre que pour

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n+k-1}}{n+k} = \mathrm{M} + \varepsilon$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

les nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ deviennent tous inférieurs à

Posons ensuite

$$(7) \begin{cases} \mathrm{P} = s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1.2} s_2 x^2 + \ldots + \frac{u(u+1)\ldots}{1.2.3\ldots} \\ \mathrm{Q} = 1 + \frac{u}{1} x + \frac{u(u+1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{u(u+1)\ldots}{1.2.3\ldots} \end{cases}$$

je puis rappeler qu'on a

$$f(x) = s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1.2} s_2 x^2 + \ldots,$$

$$\psi(x) = 1 + \frac{u}{1} x + \frac{u(u+1)}{1.2} x^2 + \ldots$$

A l'aide des équations (7) et (8) on peut maintenant donner à f la forme suivante:

$$(9) \quad . \quad . \quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{P} + \mathrm{M}[(1-x)^{-u} - \mathrm{Q}] - n(u)_n \varepsilon_0 x^n + \mathrm{R} + \mathrm{S}, \\ \mathrm{R} &= u(1-x) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u+1)_{n+k-1} \varepsilon_k x^{n+k-1}, \\ \mathrm{S} &= (1-u) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u)_{n+k-1} \varepsilon_k x^{n+k-1}. \end{aligned}\right.$$

Pour plus de brièveté on a appelé ici $(u)_p$ le coefficient de x^p da le développement de $(1-x)^{-u}$, c. à. d, on a pris

$$(u)_p = \frac{u(u+1)\dots(u+p-1)}{1.2.3\dots p}.$$

Attendu que les grandeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ sont toutes en valeur absol inférieures à ε, la valeur absolue de R est inférieure à

$$\varepsilon u(1-x) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u+1)_{n+k-1} x^{n+k-1},$$

et de même la valeur absolue de S est inférieure à

$$\pm \varepsilon (1-u) \sum_{k=1}^{k=\infty} (u)_{n+k-1} x^{n+k-1}.$$

A plus forte raison les expressions R et S sont donc, en vale absolue, inférieures à

$$\varepsilon u(1-x) \sum_{k=0}^{k=\infty} (u+1)_k x^k = \varepsilon u (1-x)^{-u}$$

et

$$\pm \varepsilon (1-u) \sum_{k=0}^{k=\infty} (u)_k x^k = \pm \varepsilon (1-u)(1-x)^{-u}$$

respectivement.

où y représente une fraction positive ou négativ

L'équation (9) donne maintenant, après multi

(11) . $(1-x)^u f(x) = \mathrm{M} + \{\mathrm{P} - \mathrm{MQ} - n\,(u)_n\,\varepsilon_0\,x^n\}\,(1$

La fonction $\mathrm{P} - \mathrm{MQ} - n(u)_n\,\varepsilon_0\,x^n$ est rationnelle sairement une valeur finie pour $x = 1$, de sort

$$\{\mathrm{P} - \mathrm{MQ} - n\,(u)_n\,\varepsilon_0\,x^n\}\,(1-x)^u$$

attendu que u a une valeur positive, tend cert lorsque x se rapproche indéfiniment de l'unité nuellement.

On peut donc toujours, quelque petite qu positive donnée δ, déterminer un nombre positi que pour toutes les valeurs de x satisfaisant à 1 de l'expression

$$\{\mathrm{P} - \mathrm{MQ} - n\,(u)_n\,\varepsilon_0\,x^n\}\,(1-x)^u$$

devienne inférieure à δ en valeur absolue.

Or, on déduit aisément de l'equation (11) que l'e tend réellement vers la limite M, lorsque x se ra de l'unité, en d'autres termes qu'on peut touj que soit une grandeur donnée β, déterminer α pour toutes les valeurs de la variable satisfa la différence entre la valeur de $(1-x)^u f(x)$ et M d

En effet, prenez deux nombres positifs δ et

$$\beta = \delta + t\,\varepsilon.$$

Déterminez ensuite le nombre n de telle man tion (6) les valeurs de $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ deviennent absolue, inférieures à celle de ε. Le nombre étant ainsi connus, prenez un nombre α tel que x et l'unité n'est pas supérieure à α, l'expressio

VII.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 111—

Over de transformatie van de periodieke fun

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n$$

Het groote nut, dat men in veel gevallen kan trekk
ontbinding in factoren van eene uitdrukking van boveng
vorm, schijnt mij de volgende eenvoudige ontwikkeling va
hierop betrekking heeft te wettigen.

Voor het geval, dat $n = 2$ is, en de uitdrukking voor ge
van φ gelijk aan 0 wordt, heeft men deze ontbinding i
bij de ontwikkeling der storingsfunctie sedert lang toegep
art. 54 van de Auseinandersetzung einer zweckmässiger
zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Plan
Abhandlung, zegt Hansen in eene noot: Die allgemeine T
Auflösung des Polynomen

$$\begin{aligned} X = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x + \gamma_3 \cos 3x + \ldots \\ + \sin x \,.\, \{\beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots\} \end{aligned}$$

in Factoren habe ich in meiner Pariser Preisschrift vollst
wickelt. Ik heb van de hier aangevoerde Mémoire, sur
bations qu'éprouvent les comètes, geen inzage kunnen

Omtrent de reëele coëfficiënten A_k, B_k, in de

$$A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_n c$$
$$+ B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_n s$$

zal alleen ondersteld worden, dat A_n en B_n n nul zijn, wat blijkbaar geen schade aan de alge bekorting zal bovenstaande uitdrukking door $F(\varphi$ zij verder

$$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi = z\,,$$

dus

$$e^{-\varphi i} = \cos \varphi - i \sin \varphi = z^{-1}$$

dan is

$$2\,F(\varphi) = 2\,A_0 + A_1 (z + z^{-1}) + A_2 (z^2 + z^{-2}) + \ldots$$
$$- B_1 i (z - z^{-1}) - B_2 i (z^2 - z^{-2}) - \ldots$$

of wel

$$2\,z^n\,F(\varphi) = G(z)\,,$$

wanneer gesteld wordt

$$G(z) = (A_n - B_n i) z^{2n} + (A_{n-1} - B_{n-1} i) z^{2n-1} + \ldots + (A$$
$$+ (A_1 + B_1 i) z^{n-1} + (A_2 + B_2 i) z^{n-2} + \ldots$$

De gebroken functie $\frac{1}{2} z^{-n} G(z)$ neemt dus voor waarden van z met den modulus 1, de w geheele functie van den $2n^{\text{den}}$ graad $G(z)$ hee eigenschap, dat

$$z^{2n}\,G\left(\frac{1}{z}\right)$$

toegevoegd is met $G(z)$, en dit heeft eene bijzon de wortels der vergelijking $G(z) = 0$ ten gevolg

$$G(z) = (A_n - B_n i)(z - p_1 e^{q_1 i})(z - p_2 e^{q_2 i}) \ldots$$

dan moet de uitdrukking rechts ...

vergelijking $G(z) = 0$, elk dezer wortels zooveel maal neergeschreven als door den graad van veelvoudigheid wordt aangewezen,

$$p_1\, e^{q_1 i},\quad p_2\, e^{q_2 i}, \ldots,\; p_{2n}\, e^{q_{2n} i},$$

en volgens de tweede ontbinding

$$\frac{1}{p_1}\, e^{q_1 i},\; \frac{1}{p_2}\, e^{q_2 i}, \ldots,\; \frac{1}{p_{2n}}\, e^{q_{2n} i}.$$

Daar nu deze beide groepen alleen in volgorde kunnen verschillen, zoo blijkt hieruit, dat wanneer $p_1 e^{q_1 i}$ een r-voudige wortel is, ook $\frac{1}{p_1} e^{q_1 i}$ een r-voudige wortel is.

De gezamenlijke wortels van de vergelijking $G(z) = 0$ kunnen dus in twee groepen gesplitst worden.

V o o r e e r s t de wortels met een modulus verschillend van 1. Deze wortels kunnen voorgesteld worden door

$$r_1\, e^{u_1 i},\quad r_2\, e^{u_2 i}, \ldots,\; r_k\, e^{u_k i},$$
$$\frac{1}{r_1}\, e^{u_1 i},\; \frac{1}{r_2}\, e^{u_2 i}, \ldots, \frac{1}{r_k}\, e^{u_k i},$$

waarin $r_1, r_2, \ldots, r_k$ alle kleiner dan 1 zijn.

Het geheele aantal dezer wortels is even en gelijk aan $2k$.

T e n t w e e d e de wortels met een modulus 1. Deze mogen zijn

$$e^{v_1 i},\quad e^{v_2 i}, \ldots,\quad e^{v_{2l} i}.$$

Hun aantal $2l$ is evenzeer even, en men heeft

$$k + l = n.$$

Het is trouwens duidelijk, dat $v_1, v_2, \ldots, v_{2l}$ de wortels zijn van

$$F(\varphi) = 0,$$

en daar $F(\varphi)$, bij vermeerdering van φ met 2π, dezelfde waarde aanneemt, zoo valt hieruit reeds op te maken, dat het aantal dezer wortels even moet zijn.

Hierbij is nog op te merken, dat uit

$$2\, z^n\, F(\varphi) = G(z)$$

waaruit blijkt, dat wanneer voor zekere waarde

$$G(z),\quad G'(z),\quad G''(z),\quad \ldots, G^{(r-1)}$$

alle nul worden, en $G^{(r)}(z)$ niet nul is, voor
waarde van φ ook

$$F(\varphi),\quad F'(\varphi),\quad F''(\varphi), \ldots,\quad F^{(r-1)}$$

gelijk nul zijn, en $F^{(r)}(\varphi)$ niet nul is; zoodat ee
van $G(z)=0$ overeenkomt met een r-voudigen

Wat $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_{2l}$ betreft, wegens
exponentiaalfunctie kan men elk dezer waarden
veelvoud van 2π vermeerderen of verminder
bijv. >0 en $<2\pi$ onderstellen. Het is voor het
geheel onverschillig, hoe de bepaling hierover ge
neer slechts aan de eenmaal aangenomen wa
wordt.

Na dit alles is dus

$$G(z)=(A_n-B_n i)\times T\times U\times V,$$

$$T=(z-r_1 e^{u_1 i})\ldots(z-r_k e^{u_k i})$$

$$U=\left(z-\frac{1}{r_1}e^{u_1 i}\right)\ldots\left(z-\frac{1}{r_k}e^{u_k}\right.$$

$$V=(z-e^{v_1 i})(z-e^{v_2 i})\ldots(z-$$

en dus voor $z=e^{\varphi i}$

$$F(\varphi)=\tfrac{1}{2}e^{-n\varphi i}(A_n-B_n i)\times T\times U$$

Door nu de factoren van T, U, V respectievelij

$$e^{\varphi i}-r_1 e^{u_1 i}=e^{u_1 i}\times(e^{(\varphi-u_1)i}-r_1),$$

$$e^{\varphi i}-\frac{1}{r_1}e^{u_1 i}=e^{\varphi i}\times\left(1-\frac{1}{r_1}e^{-(\varphi-u_1)i}\right),$$

$$F(\varphi) = C\,[1 - 2r_1 \cos(\varphi - u_1) + r_1^2] \times \ldots \times [1 - 2r_k \cos(\varphi - u_k) + r_k^2] \times$$
$$\times \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - v_1)\,\sin\tfrac{1}{2}(\varphi - v_2) \ldots \sin\tfrac{1}{2}(\varphi - v_{2l}),$$

waarin

$$C = (-1)^n\, 2^{2l-1}(A_n - B_n i)\, e^{\frac{1}{2}(v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_k)i}\,(r_1 r_2 \ldots r_k)^{-}$$

Bepaalt men R en α zoodanig, dat

$$A_n + B_n i = R\, e^{\alpha i},$$

dus

$$A_n - B_n i = R\, e^{-\alpha i}$$

is, dan volgt voor het product van alle wortels der vergelijkin $G(z) = 0$ de waarde $e^{2\alpha i}$, dus

$$e^{2\alpha i} = e^{(v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_k)i},$$

of wel

$$2\alpha + 2m\pi = v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_k,$$

waarin m een geheel getal is, waarvan de waarde door deze vergelijking volkomen bepaald wordt, wanneer men eenmaal de waarde van $v_1, v_2, \ldots, v_{2l}, u_1, u_2, \ldots, u_k$ en α op bepaalde wijze aangenome heeft.

De waarde van C wordt nu

$$(-1)^n\, 2^{2l-1}\, R\, e^{-\alpha i}\, e^{\alpha + m\pi}\,(r_1 r_2 \ldots r_k)^{-1},$$

of

$$C = (-1)^{m+n}\, 2^{2l-1}\, R\,(r_1 r_2 \ldots r_k)^{-1}.$$

Hier volgt ten slotte de samenstelling van alle formules:

$$F(\varphi) = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi +$$
$$+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_n \sin n\varphi,$$

$$G(z) = (A_n - B_n i)\, z^{2n} + (A_{n-1} - B_{n-1} i)\, z^{2n-1} + \ldots + (A_1 - B_1 i)\, z^{n+1} +$$
$$+ 2A_0 z^n + (A_1 + B_1 i)\, z^{n-1} + (A_2 + B_2 i)\, z^{n-2} + \ldots + (A_n + B_n i).$$

$$A_n + B_n i = R e^{a i},$$

$$2\alpha + 2 m \pi = v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2(u_1 + u_2$$

$$C = (-1)^{m+n} 2^{2l-1} R (r_1 r_2 \ldots r_k)^{-}$$

$$F(\varphi) = C \times \prod_{p=1}^{p=k} [1 - 2 r_p \cos(\varphi - u_p) + r_p^2] \times \prod_{p=1}^{p=2l}$$

Om een enkel voorbeeld te geven, zij

$$F(\varphi) = 4 - 3\sqrt{2}\sin\varphi - 2\sqrt{2}\cos^3$$

Men vindt, dat $F(\varphi)$, $F'(\varphi)$, $F''(\varphi)$ voor $\varphi = 45^{\circ}$ wijl $F'''(\varphi)$ niet nul is, dus heeft men

$$v_1 = v_2 = v_3 = 45^{\circ}.$$

Een vierden wortel van $F(\varphi) = 0$ vindt men dc komt

$$v_4 = 106^{\circ}\, 35'\, 45''.4.$$

Nadat aldus vier wortels van de zesdemachtsve gevonden zijn, is het gemakkelijk de beide overi te bepalen. Ik verkrijg ten slotte

$$F(\varphi) = C[1 - 2 r \cos(\varphi - u) + r^2] \sin^3 \tfrac{1}{2}(\varphi - v_1)$$

$$^{10}\log C = 1.268505,$$

$$^{10}\log r = 9.484070 - 16,$$

$$u = 239^{\circ}\, 12'\, 7''.3,$$

$$v_1 = 45^{\circ},$$

$$v_4 = 106^{\circ}\, 35'\, 45''.4.$$

VII.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 111—116)

(traduction)

De la transformation de la fonction périodique

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

La grande utilité qu'on peut retirer dans bien des cas de la décomposition en facteurs d'une expression de la forme écrite ci-dessus me semble justifier les simples considérations suivantes sur ce sujet.

Dans le cas où $n = 2$ et où cette expression ne devient nulle pour aucune valeur de φ on a depuis longtemps appliqué cette décomposition en facteurs; on s'en est servi dans le développement de la fonction perturbatrice, et dans le n°. 54 de son Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, erste Abhandlung, Hansen dit dans une note: J'ai développé complètement dans mon ouvrage couronné à Paris la théorie générale de la décomposition en facteurs du polynôme

$$\begin{aligned} X = \gamma_0 + \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \cos 2x + \gamma_3 \cos 3x + \ldots \\ + \sin x \,.\, \{\beta_0 + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos 2x + \ldots\}. \end{aligned}$$

Je n'ai pas pu me procurer le Mémoire sur les perturbations qu'éprouvent les comètes, auquel l'auteur fait allusion; et la forme dans laquelle Hansen pose le problème pourrait nous amener à supposer que sa méthode diffère quelque peu de la nôtre.

est celle ci que A_n et B_n ne s'annulent pas en même
nuit pas à la généralité.

Pour simplifier, l'expression ci-dessus sera indiqué
en outre

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi = z,$$

donc

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi = z^{-1},$$

nous avons alors

$$2F(\varphi) = 2A_0 + A_1(z + z^{-1}) + A_2(z^2 + z^{-2}) + \quad$$
$$- B_1 i(z - z^{-1}) - B_2 i(z^2 - z^{-2}) - \dots - B$$

ou bien

$$2z^n F(\varphi) = G(z),$$

si l'on pose

$$G(z) = (A_n - B_n i)z^{2n} + (A_{n-1} - B_{n-1} i)z^{2n-1} + \dots + (A_1$$
$$+ (A_1 + B_1 i)z^{n-1} + (A_2 + B_2 i)z^{n-2} + \dots +$$

La fonction fractionnaire $\frac{1}{2}z^{-n}G(z)$ prend donc p
pour des valeurs de z dont le module est égal à l'un
La fonction entière $G(z)$ du degré $2n$ jouit apparemm
suivante : l'expression

$$z^{2n}G\left(\frac{1}{z}\right)$$

est conjuguée avec $G(z)$. Il en résulte une certaine pr
de l'équation $G(z) = 0$. En effet, posons

$$G(z) = (A_n - B_n i)(z - p_1 e^{\psi_1 i})(z - p_2 e^{\psi_2 i}) \dots (z$$

L'expression qui figure au second membre doit alo
lorqu'on remplace z par $\frac{1}{z}$, qu'on multiplie ensui
change enfin i en $-i$. Par conséquent

multiplicité correspondant; et d'après la seconde décomposition elles sont

$$\frac{1}{p_1}e^{q_1 i},\ \frac{1}{p_2}e^{q_2 i},\ \ldots,\ \frac{1}{p_{2n}}e^{q_{2n} i}.$$

Comme ces deux groupes ne peuvent différer que par l'ordre de leur termes, il s'ensuit que lorsque $p_1 e^{q_1 i}$ est r fois racine, il en est de mêm pour $\frac{1}{p_1}e^{q_1 i}$.

Les racines de l'équation $G(z)=0$ peuvent donc être divisées en deux groupes.

On a d'abord les racines dont le module diffère de l'unité Ce racines peuvent être représentées par les expressions

$$r_1 e^{u_1 i},\quad r_2 e^{u_2 i},\ \ldots,\ r_k e^{u_k i},$$
$$\frac{1}{r_1}e^{u_1 i},\ \frac{1}{r_2}e^{u_2 i},\ \ldots,\ \frac{1}{r_k}e^{u_k i},$$

où les grandeurs $r_1, r_2, \ldots, r_k$ sont toutes inférieures à l'unité.

Le nombre total de ces racines est pair et égal à $2k$.

En second lieu nous avons les racines avec un module 1. Supposons que ce soient les racines

$$e^{v_1 i},\quad e^{v_2 i},\ \ldots,\quad e^{v_{2l} i}.$$

Leur nombre $2l$ est pair également, et l'on a

$$k+l=n.$$

Il est d'ailleurs évident que $v_1, v_2, \ldots, v_{2l}$ sont les racines de

$$F(\varphi)=0$$

et comme $F(\varphi)$, lorsque l'angle φ est augmenté de 2π, prend la même valeur, cette remarque suffit pour faire voir que le nombre de ces racines doit être pair.

Nous pouvons encore observer à ce sujet que l'équation

$$2z^n F(\varphi)=G(z)$$

ce qui fait voir que lorsque pour une valeur déte
fonctions

$$G(z),\quad G'(z),\quad G''(z),\ \ldots,\ G^{(r-1)}(z)$$

s'annulent toutes, tandis que $G^{(r)}(z)$ ne s'annule pas

$$F(\varphi),\quad F'(\varphi),\quad F''(\varphi),\ \ldots,\ F^{(r-1)}(\varphi)$$

s'annulent également pour la valeur correspondante
$F^{(r)}(\varphi)$ ne s'annule pas: d'où il résulte qu'un nombr
racine de $G(z)=0$ correspond à un nombre qui
de $F(\varphi)=0$.

Quant à $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_{2l}$, à cause
de la fonction exponentielle, on peut augmenter ou d
de ces grandeurs d'un multiple quelconque de 2π,
peut les supposer toutes p. e. >0 et $<2\pi$. Il est d
ment indifférent pour la suite de savoir quelle cho
deurs on a fait: il suffit qu'on s'en tienne aux
adoptées.

Après tout ceci on a donc

$$G(z)=(A_n - B_n i)\times T\times U\times V,$$
$$T=(z-r_1 e^{u_1 i})\ldots(z-r_k e^{u_k i}),$$
$$U=\left(z-\frac{1}{r_1}e^{u_1 i}\right)\ldots\left(z-\frac{1}{r_k}e^{u_k i}\right),$$
$$V=(z-e^{v_1 i})(z-e^{v_2 i})\ldots(z-e^{v_{2l} i});$$

partant, pour $z=e^{\varphi i}$

$$F(\varphi)=\tfrac{1}{2}e^{-n\varphi i}(A_n - B_n i)\times T\times U\times V$$

En réduisant alors les facteurs de T, de U et de V
de la manière suivante

$$e^{\varphi i}-r_1 e^{u_1 i}=e^{u_1 i}\times(e^{(\varphi-u_1)i}-r_1),$$
$$e^{\varphi i}-\frac{1}{r_1}e^{u_1 i}=e^{\varphi i}\times\left(1-\frac{1}{r_1}e^{-(\varphi-u_1)i}\right),$$

on obtient

$$F(\varphi) = C\,[1 - 2r_1 \cos(\varphi - u_1) + r_1^2] \times \ldots \times [1 - 2r_k \cos(\varphi - u_k) + r_k^2] \times$$
$$\times \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - v_1) \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - v_2) \ldots \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - v_{2l});$$

où

$$C = (-1)^n\, 2^{2l-1} (A_n - B_n i)\, e^{\frac{1}{2}(v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_k)i} (r_1 r_2 \ldots r_k)^{-1}$$

Si l'on détermine R et α de telle manière que

$$A_n + B_n i = R\, e^{\alpha i},$$

donc

$$A_n - B_n i = R\, e^{-\alpha i},$$

on obtient pour le produit de toutes les racines de l'équation $G(z) = 0$ la valeur $e^{2\alpha i}$ et par conséquent

$$e^{2\alpha i} = e^{(v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_k)i}$$

u bien

$$2\alpha + 2m\pi = v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2u_1 + 2u_2 + \ldots + 2u_k;$$

équation dans laquelle m représente un nombre entier, dont la valeur est entièrement déterminée par cette équation, dès qu'on a adopté des valeurs déterminées de $v_1, v_2, \ldots, v_{2l}$, de $u_1, u_2, \ldots, u_k$ et de α.

La valeur de C devient maintenant

$$(-1)^n\, 2^{2l-1} R\, e^{-\alpha i} e^{(\alpha + m\pi)i} (r_1 r_2 \ldots r_k)^{-1},$$

ou

$$C = (-1)^{m+n}\, 2^{2l-1} R\, (r_1 r_2 \ldots r_k)^{-1}.$$

Voici enfin une récapitulation de toutes les formules trouvées:

$$F(\varphi) = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi +$$
$$+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \ldots + B_n \sin n\varphi,$$

$$G(z) = (A_n - B_n i) z^{2n} + (A_{n-1} - B_{n-1} i) z^{2n-1} + \ldots + (A_1 - B_1 i) z^{n+1} +$$
$$+ 2A_0 z^n + (A_1 + B_1 i) z^{n-1} + (A_2 + B_2 i) z^{n-2} + \ldots + (A_n + B_n i).$$

Les racines de $G(z) = 0$ sont

$$A_n + B_n i = R e^{ai},$$
$$2a + 2m\pi = v_1 + v_2 + \ldots + v_{2l} + 2(u_1 + u_2 + \ldots$$
$$C = (-1)^{m+n} 2^{2l-1} R (r_1 r_2 \ldots r_k)^{-1},$$
$$F(\varphi) = C \times \prod_{p=1}^{p=k} [1 - 2 r_p \cos(\varphi - u_p) + r_p^2] \times \prod_{p=1}^{p=2l} \sin \tfrac{1}{2}$$

Pour donner un seul exemple, soit

$$F(\varphi) = 4 - 3\sqrt{2} \sin\varphi - 2\sqrt{2} \cos^3 \varphi.$$

On trouve que $F(\varphi)$, $F'(\varphi)$, $F''(\varphi)$ s'annulent pour $\varphi =$ $F'''(\varphi)$ ne s'annule pas. Donc

$$v_1 = v_2 = v_3 = 45°.$$

Une quatrième racine de $F(\varphi) = 0$, trouvée par d'approximation, est

$$v_4 = 106° \, 35' \, 45''.4.$$

Après que quatre racines de l'équation du sixième ont été trouvées de cette manière, il est facile de deux autres $r e^{ui}$ et $\frac{1}{r} e^{ui}$. J'obtiens enfin

$$F(\varphi) = C[1 - 2r\cos(\varphi - u) + r^2] \sin^3 \tfrac{1}{2}(\varphi - v_1) \sin \tfrac{1}{2}$$
$$^{10}\log C = 1.268505,$$
$$^{10}\log r = 9.484070 - 16,$$
$$u = 239° \, 12' \, 7''.3,$$
$$v_1 = 45°,$$
$$v_4 = 106° \, 35' \, 45''.4.$$

VIII.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 198—211)

Over een algorithmus voor het meetkundig midden.

In het 89ste deel van het Journal für die reine und angewandte Mathematik p. 343, heb ik eene rekenwijze aangegeven, waardoor het mogelijk is, wanneer k positieve getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ gegeven zijn, uit deze getallen op rationale wijze k andere getallen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ af te leiden, zoodanig dat $a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_k$ is, en de verschillen tusschen de getallen $b_1, b_2, \ldots, b_k$ onderling zoo klein kunnen zijn als men verkiest.

Ik stel mij voor in het volgende op dit onderwerp terug te komen, en de bewijzen mede te deelen van hetgeen in die korte noot is uitgesproken.

1. Zij dan, wanneer $a_1, a_2, \ldots, a_k$ willekeurige reëele getallen zijn, M_1 hun rekenkundig midden, d. w. z. hun som gedeeld door hun aantal k; M_2 het rekenkundig midden van alle producten van twee verschillende der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$, d w. z. de som dezer producten gedeeld door hun aantal $\frac{k(k-1)}{2}$; evenzoo M_3 het rekenkundig midden van alle producten van drie verschillende der getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ enz; eindelijk $M_k = a_1 a_2 \ldots a_k$.

Voor de gelijkvormigheid stel ik nog vast,
De uitdrukking

$$M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1}$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots, k-1)$$

is nu in het algemeen positief, of scherper uitgec
king is nooit negatief en alleen dan gelijk nul,
tallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ aan elkander gelijk zijn, ôf
$k-p+1$ dezer getallen gelijk nul zijn, in welk
en M_{p+1} afzonderlijk gelijk nul zijn.

Deze eigenschap is in hoofdzaak sedert lang
eenige geschiedkundige opmerkingen hieromtrer
met te verwijzen naar een opstel van Dr. D. B
het 8ste deel der Verslagen en mededeelingen de
demie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurk
1858, p. 248—260. Men zie ook het opstel v
9de deel dier Verslagen, p. 92—106.

Voor het gemak van den lezer, en ook om
waarin de uitdrukking gelijk nul wordt, volle
laat ik hier echter het bewijs van het boven ge

2. Zij gegeven

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x- \\ f(x) = M_0 x^k - \frac{k}{1} M_1 x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \, . \, 2} M_2 x \end{cases}$$

waar in het tweede lid het bovenste of onderst
is, al naar dat k even of oneven is.

Volgens de onderstelling omtrent $a_1, a_2, \ldots, a_k$
gelijking $f(x) = 0$ slechts reëele wortels, en hetz
de vergelijkingen, die vorderen, dat de verschillend
van $f(x)$ de waarde nul aannemen. Daarom heeft

Ik onderscheid nu deze drie gevallen.

1°. M_{p+1} is niet gelijk nul.

2°. $M_{p+1}=0$, maar M_p is niet gelijk nul.

3°. $M_{p+1}=0$ en $M_p=0$.

In het eerste geval zijn ook alle wortels van de verg

$$(3)\quad 0=M_{p+1}x^{p+1}-\frac{p+1}{1}M_p x^p+\frac{p(p+1)}{1\,.\,2}M_{p-1}x^{p-1}\ldots\pm\frac{p-}{}$$

reëel, en derhalve ook die van

$$(4)\quad \ldots\ldots\quad 0=M_{p+1}x^2-2M_p x+M_{p-1};$$

want het tweede lid dezer laatste vergelijking onders alleen door een standvastigen factor van de $(p-1)^{ste}$ afg de functie, die het tweede lid van (3) uitmaakt. Uit de r wortels van (4) volgt nu

$$M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}\geqq 0;$$

en wel is $M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}$ alleen dan gelijk nul, wannee wortels van (4) gelijk zijn. Hiertoe is weder noodzakel doende, dat alle wortels van (3), dus ook alle wortels v elkaar gelijk zijn, wat weder medebrengt dat alle w $f(x)=0$ gelijk zijn, of $a_1=a_2=\ldots=a_k$.

Is dus M_{p+1} niet gelijk nul, dan is $M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}$ altij behalve wanneer $a_1=a_2=\ldots=a_k$, in welk geval de u gelijk aan nul is.

In het tweede geval is blijkbaar $M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}$ pos

Eindelijk is in het derde geval deze uitdrukking gelijl en heeft de vergelijking (2) minstens twee wortels gelijk n de vergelijking $f(x)=0$ minstens $k-p+1$ wortels gelijk of m. a. w. in dit geval zijn minstens $k-p+1$ der getallen gelijk aan nul

zoodat de getroffen overeenkomst omtrent M_0 ver

$$a'_p = \frac{M_p}{M_{p-1}},$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

waaruit volgt

$$a'_p - a'_{p+1} = \frac{M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1}}{M_{p-1} M_p}$$

dus

$$a'_p \geqq a'_{p+1};$$

en, wanneer ook de waarde nul voor $a_1, a_2, \ldots,$ kan alleen dan $a'_1 = a'_{p+1}$ worden, wanneer $a_1 =$ ook dit laatste geval geheel zonder belang is, buiten beschouwing blijven, en is derhalve

(6) . . . . $a'_1 > a'_2 > a'_3 > a'_4 > \ldots > a'_k$

terwijl uit (5) onmiddellijk volgt

(7) . . . . $a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_k = a'_1\, a'_2\, a'_3 \ldots a'_k$.

Nu is blijkbaar

$$a'_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k}$$

$$a'_k = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots +}$$

en, wanneer wij nu onderstellen dat geen der g grooter dan a_1 en kleiner dan a_k is, zoo volgt

$$a'_1 \leqq \frac{(k-1)\, a_1 + a_k}{k} < a_1,$$

$$a'_k > a_1,$$

evenzoo uit $a_1'', a_2'', \ldots, a_k''$ de getallen $a_1''', a_2''', \ldots, a_k'''$ enz; dan is du

$$a_1 > a_1' > a_2' > \ldots > a_k' > a_k,$$
$$a_1' > a_1'' > a_2'' > \ldots > a_k'' > a_k',$$
$$a_1'' > a_1''' > a_2''' > \ldots > a_k''' > a_k'',$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$0 < a_1' - a_k' < \frac{k-1}{k}(a_1 - a_k),$$

$$0 < a_1'' - a_k'' < \frac{k-1}{k}(a_1' - a_k') < \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 (a_1 - a_k),$$

$$0 < a_1''' - a_k''' < \frac{k-1}{k}(a_1'' - a_k'') < \left(\frac{k-1}{k}\right)^3 (a_1 - a_k),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_1 a_2 \ldots a_k = a_1' a_2' \ldots a_k' = a_1'' a_2'' \ldots a_k'' = a_1''' a_2''' \ldots a_k''' = \ldots,$$

en voor de n^{de} afgeleide groep van getallen $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}$ heef
men

$$a_1^{(n-1)} > a_1^{(n)} > a_2^{(n)} > \ldots > a_k^{(n)} > a_k^{(n-1)},$$

$$0 < a_1^{(n)} - a_k^{(n)} < \left(\frac{k-1}{k}\right)^n (a_1 - a_k),$$

$$a_1 a_2 \ldots a_k = a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots a_k^{(n)}.$$

Daar nu

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$$

bij onbepaald toenemende waarden van n, ten slotte zoo klein word
als men verkiest, zoo volgt dat de getallen $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}$ all
voor $n = \infty$ tot eene gemeenschappelijke limiet convergeeren, di

Eerste voorbeeld. $k=3$.

$$a_1 = 5, \qquad a_2 = 5, \qquad a$$

$$a_1' = \frac{14}{3}, \qquad a_2' = \frac{65}{14}, \qquad a$$

$$a_1'' = \frac{7603}{1638}, \qquad a_2'' = \frac{35290}{7673}, \qquad a$$

of

$$a_1'' = 4.64163\,61416\,36\ldots$$

$$a_2'' = 4.64158\,88465\,08\ldots$$

$$a_3'' = 4.64154\,15131\,77\ldots$$

Men ziet, hoe snel de getallen van eene
naderen, immers

$$a_1' - a_2' = 0.02380\,95\ldots$$

$$a_2' - a_3' = 0.02747\,25\ldots$$

$$a_1'' - a_2'' = 0.00004\,72951$$

$$a_2'' - a_3'' = 0.00004\,73333$$

Het gemiddelde der waarden van de twe

$$a_1''' = 4.64158\,88337\,74\ldots$$

Later zal blijken, dat het verschil $a_1''' - a$
de 10de decimaal bedraagt. De limiet is hi

$$\sqrt[3]{100} = 4.64158\,88336\,1276$$

Tweede voorbeeld. $k=4$.

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 2,$$

$$a_1' = \frac{9}{4}, \qquad a_2' = \frac{20}{9}, \qquad a_3' = \frac{1}{5}$$

$$a_1'' = \frac{17531}{7920}, \qquad a_2'' = \frac{116410}{52593}, \qquad a_3'' = \frac{1}{5}$$

en

$$a'_1 - a'_2 = 0.02777\,78\ldots,$$

$$a'_2 - a'_3 = 0.02222\,22\ldots,$$

$$a'_3 - a'_4 = 0.01118\,18\ldots,$$

$$a''_1 - a''_2 = 0.00009\,76697\,0\ldots,$$

$$a''_1 - a''_3 = 0.00009\,74240\,1\ldots,$$

$$a''_3 - a''_4 = 0.00009\,71786\,0\ldots.$$

Uit de waarden van a''_1, a''_2, a''_3, a''_4 volgt

$$a'''_1 = 2.21336\,38420\,8\ldots;$$

de limiet is hier

$$\sqrt[4]{24} = 2.21336\,38394\,007\ldots.$$

5. In de beide gegeven voorbeelden worden de verschillen de opvolgende getallen van eene zelfde groep

$$a'_1 - a'_2,\ a'_2 - a'_3, \ldots$$

$$a''_1 - a''_2,\ a''_2 - a''_3, \ldots$$

niet alleen bij overgang tot de volgende groepen, hoe langer ho kleiner, maar de verschillen die tot eene zelfde groep behooren, wor den hierbij onderling hoe langer hoe minder verschillend.

Inderdaad kan men het volgende uitspreken.

Het quotiënt van elke twee der $k-1$ verschillen

$$a_p^{(n)} - a_{p+1}^{(n)}$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots k-1)$$

convergeert voor $n = \infty$ tot de limiet 1.

Van de verschillende bewijzen, die ik voor deze eigenschap vond is het volgende verreweg het eenvoudigste.

6. Ik stel

$$a_1 = a - x_1,$$

$$a_2 = a - x_2$$

$$(9) \quad . \quad . \quad \begin{cases} f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k), \\ f(x) = N_0 x^k - \frac{k}{1} N_1 x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} N \end{cases}$$

zoodat de getallen $N_0, N_1, \ldots, N_k$ op dezelfde w
vormd zijn als $M_0, M_1, \ldots, M_k$ uit $a_1, a_2, \ldots,$
onduidelijkheid aanleiding geven, dat $f(x)$ hier
andere beteekenis heeft dan in art. 2. Men
middellijk, dat de getallen $M_0, M_1, \ldots, M_k$, op
middel van de functie $f(x)$ en hare afgelei
kunnen worden

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} M_k = \\ k M_{k-1} = \\ k(k-1) M_{k-2} = \\ \cdots\cdots\cdots \\ k(k-1) \ldots 3 \cdot 2 M_1 = \\ k(k-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 M_0 = \end{cases}$$

waaruit dus volgt

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a'_p = \frac{p f^{k-p}(a)}{f^{k-p+1}(a)},$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

waarbij $f^0(a) = f(a)$ te nemen is.

In plaats van (11) kan men ook schrijven

$$(12) \quad . \quad a'_p = \frac{N_0 a^p - \frac{p}{1} N_1 a^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} N}{N_0 a^{p-1} - \frac{(p-1)}{1} N_1 a^{p-1} + \frac{(p-1)(}{1 \cdot}}$$

Ontwikkelt men deze waarde van a'_p volgens
van a, dan vindt men voor de eerste termen

Evenzoo mogen $z_1 < z_2 < \ldots < z_{p-1}$ de reëele ongelijke wortels van de vergelijking $f^{k-p+1}(x) = 0$ zijn, zoodat z_1 tusschen y_1 en y_2, z tusschen y_2 en $y_3 \ldots$, eindelijk z_{p-1} tusschen y_{p-1} en y_p ligt. Hierbi is dus $p > 1$ te onderstellen. Volgens (11) is dan

$$a'_p = \frac{(a-y_1)(a-y_2)\ldots(a-y_p)}{(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_{p-1})},$$

en wanneer men de deeling uitvoert en in gedeeltelijke breuken splitst, volgens (13)

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a'_p = a - N_1 + \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{A_k}{a-z_k},$$

waarin

$$(15) \quad \ldots \quad A_k = \frac{(z_k-y_1)(z_k-y_2)\ldots(z_k-y_p)}{(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z_k-z_{p-1})}.$$

In den teller van deze uitdrukking voor A_k zijn de factoren

$$(z_k-y_1)(z_k-y_2)\ldots(z_k-y_k),$$

alle positief; daarentegen de overige factoren, ten getale van $p-k$

$$z_k - y_{k+1},\; z_k - y_{k+2},\; \ldots,\; z_k - y_p,$$

alle negatief.

De negatieve factoren in den noemer van A_k zijn

$$z_k - z_{k+1},\; z_k - z_{k+2},\; \ldots,\; z_k - z_{p-1};$$

hun aantal is $p-k-1$. Het aantal negatieve factoren in den telle van A_k is dus één grooter dan het aantal negatieve factoren in de noemer; derhalve zijn

$$A_1,\; A_2,\; A_3,\; \ldots,\; A_{p-1},$$

alle negatief, en daar de verschillen

$$a - z_1 > a - z_2 > \ldots > a - z_{k-1}$$

positief zijn, zoo volgt

volgens (13) gelijk aan $-(p-1)(N_1^2-N_0 N_2)$, verder
dan $a-x_1=a_1$, $a-z_{p-1}$ grooter dan $a-x_k=$
blijkbaar gelijk aan a_1' is; zoodat nu volgt

$$(16) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} a_p' < a_1' - \dfrac{(p-1)(N_1^2-N_0 N_2)}{a_1}, \\ a_p' > a_1' - \dfrac{(p-1)(N_1^2-N_0 N_2)}{a_k}. \end{array} \right.$$

Voor $p=1$ heeft men blijkbaar de teekens
gelijkteeken te vervangen.

7. De afleiding der ongelijkheden (16) steunt w
standigheid dat $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ alle negatief zij
laatste ook nog aldus aantoonen.

Zij

$$g(x)=(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_p)$$

dan is blijkbaar

$$a_p'=\frac{p\,g(a)}{g'(a)},$$

en

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{x-y_1}+\frac{1}{x-y_2}+\ldots+\frac{1}{x-y}$$

waaruit door differentiatie volgt

$$\frac{g(x)\,g''(x)-g'(x)\,g'(x)}{g(x)\,g(x)}=-\frac{1}{(x-y_1)^2}-\frac{1}{(x-y_2)^2}-$$

en men vindt, hierin $x=z_k$ stellende, daar $g'(z_k)$

$$\frac{g''(z_k)}{g(z_k)}=-\frac{1}{(z_k-y_1)^2}-\frac{1}{(z_k-y_2)^2}-\ldots-$$

Nu is echter, zooals uit $a_p'=\dfrac{p\,g(a)}{g'(a)}$ onmiddellij

$$A_k=\frac{p\,g(z_k)}{g''(z_k)}$$

$$a'_p - a'_{p+1} < \frac{a_k + p\,(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}\,(\mathrm{N}_1^2 - \mathrm{N}_0\,\mathrm{N}_2),$$

$$a'_p - a'_{p+1} > \frac{a_1 - p\,(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}\,(\mathrm{N}_1^2 - \mathrm{N}_0\,\mathrm{N}_2),$$

dus daar p hoogstens gelijk is aan $k-1$ en $a_1 - a_k$ en $\mathrm{N}_1^2 - \mathrm{N}_0\,\mathrm{N}$ positief zijn, zoo veel te meer

$$17)\quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} a'_p - a'_{p+1} &< \frac{a_k + (k-1)\,(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}\,(\mathrm{N}_1^2 - \mathrm{N}_0\,\mathrm{N}_2) \\ a'_p - a'_{p+1} &> \frac{a_1 - (k-1)\,(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}\,(\mathrm{N}_1^2 - \mathrm{N}_0\,\mathrm{N}_2). \end{aligned} \right.$$

In de uitdrukking rechts komt nu p niet meer voor.

Al de voorgaande ontwikkelingen blijven onveranderd, wannee men de getallen $a_1, a_2, \ldots, a_k$, door $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots a_k^{(n)}$ en tegelijker ijd $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ door $a_1^{(n+1)}, a_2^{(n+1)}, \ldots, a_k^{(n+1)}$ vervangt.

Daar nu reeds bewezen is, dat $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}$ voor $n = \infty$ to eene zelfde positieve limiet naderen, zoo kan men blijkbaar n altij zóó groot nemen, dat

$$a_1^{(n)} - (k-1)\,(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})$$

positief is, en dan volgt gemakkelijk

$$18)\quad \frac{a_1^{(n)} - (k-1)\,(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})}{a_k^{(n)} + (k-1)\,(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})} < \frac{a_p^{(n+1)} - a_{p+1}^{(n+1)}}{a_q^{(n+1)} - a_{q+1}^{(n+1)}} < \frac{a_k^{(n)} + (k-1)\,(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})}{a_1^{(n)} - (k-1)\,(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})}$$

Neemt men n groot genoeg, dan verschillen de beide waarden waartusschen

$$\frac{a_p^{(n+1)} - a_{p+1}^{(n+1)}}{a_q^{(n+1)} - a_{q+1}^{(n+1)}}$$

igt, zoo weinig als men verkiest van de eenheid.

Hiermede is dus het in art 5 uitgesprokene bewezen.

of

$$k\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}\cdots+\frac{1}{b_k}\right)(b_1'-b_k')= \quad 1+\frac{b_2}{b_1}+$$

$$+\frac{b_1}{b_2}+1+$$

$$+\frac{b_1}{b_3}+\frac{b_2}{b_3}+$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{b_1}{b_k}+\frac{b_2}{b_k}+$$

De uitdrukking rechts is

$$=\Sigma\left(\frac{b_p}{b_q}+\frac{b_q}{b_p}-2\right)=\Sigma\,\frac{(b_p-b_q)^2}{b_p\,b_q},$$

waar p en q de getallen $1, 2, 3, \ldots, k$ doorloope

Deelt men nu beide leden door $(b_1-b_k)^2$ en

de limiet voor $n=\infty$, dan volgt, daar volgens h

$$\lim_{n=\infty}\frac{(b_p-b_q)^2}{(b_1-b_k)^2}=\left(\frac{p-q}{k-1}\right)^2$$

is, en ter bekorting de limiet van $b_1, b_2, \ldots, b_k$ g

$$\frac{k^2}{b}\lim_{n=\infty}\frac{b_1'-b_k'}{(b_1-b_k)^2}=\frac{1}{(k-1)^2\,b^2}\,\Sigma\,(p-$$

Nu is

$$\Sigma\,(p-q)^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+(k-$$

$$+1^2+2^2+\ldots+(k-$$

$$+1^2+\ldots+(k-$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

waarvoor men na herleiding verkrijgt

$$\Sigma\,(p-q)^2=\frac{1}{12}\,k^2\,(k^2-1),$$

10. Deze formule (19) geeft een duidelijk begrip van de snelheid waarmede ten slotte de getallen tot hunne gemeenschappelijke limiet $\sqrt[k]{a_1\, a_2 \ldots a_k}$ convergeeren; het blijkt dat $a_1^{(n+1)} - a_k^{(n+1)}$ eene eindige verhouding heeft tot de tweede macht van $a_1^{(n)} - a_k^{(n)}$.

In het eerste voorbeeld van art. 4 was

$$a_1'' - a_3'' = 0.00009\ 4628\ldots,$$

en als benaderde waarde van $a_1''' - a_3'''$ kan nu genomen worden

$$\frac{1}{6}\,\frac{(a_1'' - a_3'')^2}{a_2''};$$

en daar a_1''', a_2''', a_3''' op zeer weinig na eene rekenkunstige reeks vormen, heeft men aan

$$a_1''' = 4.64158\ 88337\ 74\ldots$$

de correctie

$$-\frac{1}{12}\,\frac{(a_1'' - a_3'')^3}{a_2''} = -0.00000\ 00001\ 61\ldots$$

toe te voegen, om de in 12 decimalen nauwkeurige waarde van $\sqrt[3]{100}$

$$4.64158\ 88336\ 13\ldots$$

te verkrijgen.

In het tweede voorbeeld heeft men aan

$$a_1''' = 2.21336\ 38420\ 8\ldots$$

de correctie

$$-\frac{5}{72}\,\frac{(a_1'' - a_4'')^2}{a_1''} = -0.00000\ 00026\ 8\ldots$$

aan te brengen, om te verkrijgen

$$\sqrt[4]{24} = 2.21336\ 38394\ 0\ldots.$$

dan zijn blijkbaar M_0, M_1, $M_2, \ldots, M_h$ positief, n
$M_{h+1}, \ldots, M_k$ alle gelijk nul.

Derhalve worden

$$a'_1,\ a'_2, \ldots, a'_h$$

alle positief en niet gelijk nul, $a'_{h+1} = 0$; terwij
bepaalde beteekenis hebben. Stelt men echter va
$a'_{h+1}, \ldots, a'_k$ allen gelijk nul zullen zijn, dan zijn er

$$a'_1,\ a'_2, \ldots, a'_k$$

evenveel gelijk nul, als van de oorspronkelijke g

Men ziet nu onmiddellijk, dat de verdere b
art. 3 met hoogst geringe wijzigingen onveranc
dat ook nu de getallen $a_1^{(n)}$, $a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}$ tot een
gelijk aan nul is, convergeeren.

Daarentegen is de wijze, waarop deze conve
vindt, geheel anders, en men kan zeggen, dat
veel langzamer is.

Het blijkt namelijk, dat de verhouding van
getallen

$$a_p,\ a'_p,\ a''_p,\ a'''_p, \ldots, a_p^{(n)} \ldots$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots, h)$$

bij toenemende n tot eene eindige, gemakkelijk
convergeert, die voor de verschillende waarden
terwijl de verhoudingen der getallen van eene ze

$$a_1^{(n)},\ a_2^{(n)}, \ldots, a_h^{(n)}$$

tot eindige limieten convergeeren, die alleen va
niet van de getallenwaarden van a_1, $a_2, \ldots, a_h$, w
gegaan.

Daar het strenge bewijs van deze eigenscha

die, zoo zij door $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vervuld worden, voldoende zijn on
te besluiten, dat de rekenwijze tot eene bepaalde limiet voert, en dar
aan te geven, welke der k waarden van $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)^{\frac{1}{k}}$ deze limie
s; maar het schijnt uiterst bezwaarlijk om, zoo $a_1, a_2, \ldots, a_k$ wille
keurig gegeven zijn, uit te maken, of er al dan niet eene limiet is
en in het eerste geval deze limiet aan te geven.

Alleen het geval $k=2$ levert niet het minste bezwaar op, en he
zal daarom voldoende zijn, de volgende uitkomsten eenvoudig mede
te deelen.

Men vindt dan, dat in dit geval er altijd eene limiet gelijk aan

$$\pm\sqrt{a_1\, a_2}$$

s, behalve wanneer de verhouding $a_1 : a_2$ reëel negatief is.

Stelt men

$$a_1 = r_1\, e^{\alpha_1 i},$$
$$a_2 = r_2\, e^{\alpha_2 i},$$

en neemt r_1 en r_2 positief, α_1 en α_2 tusschen 0 en 2π (de eerste waard
n-, de tweede buitengesloten), dan is de limiet gelijk aan

$$+\sqrt{r_1\, r_2}\, e^{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)i},$$

wanneer de volstrekte waarde van $\alpha_1 - \alpha_2$ kleiner dan π is.

Is echter $\alpha_1 - \alpha_2$ grooter dan π, dan is de limiet gelijk aan

$$-\sqrt{r_1\, r_2}\, e^{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)i}.$$

Neemt men bijv.

$$a_1 = z,\ a_2 = \frac{1}{z},$$

dan is de limiet gelijk aan $+1$ of -1, al naar dat het reëele dee
van z positief of negatief is.

Daar

$$a_1,\ a_1',\ a_1'',\ a_1''' \ldots$$

convergeerend voor alle waarden van z, waarvan h
gelijk nul is, en waarvan de som gelijk aan $+1$
is, al naar dat het reëele deel van z positief of n

Eene dergelijke reeks is door Weierstrass opge
belangrijke verhandeling zur Functionenlehre, vo
Monatsberichte der Königl. Preuss Akademie de
1880, p. 735.

Kort daarna merkte Tannery op, dat men op
wijze dergelijke reeksen kan vormen. (Zie Mon
p. 228 e v.).

Men zal gemakkelijk opmerken, dat de bovensta
zonder geval begrepen is onder degene, die Weie
230 aangeeft. $\Big($Men verbetere daar de drukfout
$x' = \dfrac{1+x}{1-x}$ moet gelezen worden $x' = \dfrac{1-x}{1+x}\Big)$.

Eene vertaling van het eerste opstel van Weier
mededeeling naar aanleiding van Tannery's opmer
in het Bulletin des sciences mathématiques et astrono
série, tome V, Avril 1881.

VIII.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 198—211.)

(traduction)

Sur un algorithme de la moyenne géométrique.

Dans le 89ième tome du Journal für die reine und angewandt Mathematik, p. 343, j'ai indiqué une méthode de calcul permettant lorsque k nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont donnés, d'en déduir rationnellement k autres nombres $b_1, b_2, \ldots, b_k$ de telle manière qu'o ait $a_1 a_2 \ldots a_k = b_1 b_2 \ldots b_k$ et que les différences des nombres $b_1, b_2, \ldots, b$ soient aussi petites qu'on veut.

Je me propose de retourner sur ce sujet dans l'article présent e de faire connaître les preuves de ce qui a été avancé dans cett brève note.

1. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des nombres réels arbitraires, M_1 leu moyenne arithmétique, c. à. d. leur somme divisée par leur nombr k; M_2 la moyenne arithmétique de tous les produits différents de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ pris deux-à-deux, c à. d. la somme de ce produits divisée par leur nombre $\frac{k(k-1)}{2}$; de même M_3 la moyenn arithmétique de tous les produits différents des nombres $a_1, a_2, \ldots, a$

rents; nous avons simplement voulu attribuer à ch
individualité distincte

Pour des raisons de symétrie je pose encore $M_0 =$

$$M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1}$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots, k-1)$$

est généralement positive ou, plus précisément, cett
jamais négative et ne devient nulle que lorsque
$a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont égaux entre eux ou qu'au m
ces nombres s'annulent auquel cas les expressions
nulent évidemment l'une et l'autre.

Cette propriété générale est connue depuis longt
d'histoire il suffit de renvoyer le lecteur à un a
D. Bierens de Haan publié dans le 8ième tome
mededeelingen der Koninklijke Akademie van We
tion de physique, Amsterdam 1858, p. 248—260.
aussi l'article de Lobatto dans le 9ième tome des Vers

Cependant pour épargner de la peine au lect
traiter d'une façon générale les cas limites où l'exp
s'annule, je fais suivre ici la preuve du théorème

2. Posons

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k) \\ f(x) = M_0 x^k - \frac{k}{1} M_1 x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} M_2 x^{k-} \end{cases}$$

où il faut prendre dans le second membre le sign
signe inférieur selon que le nombre k est pair ou

D'après l'hypothèse faite au sujet des nombres a_1
tion $f(x) = 0$ n'a que des racines réelles et la mêr
vrai pour les équations exprimant que les dérivé
$f(x)$ s'annulent. C'est pourquoi l'équation

Je distingue les trois cas suivants.

1°. M_{p+1} diffère de zéro.

2°. $M_{p+1}=0$, mais M_p diffère de zéro.

3°. $M_{p+1}=0$ et $M_p=0$.

Dans le premier cas les racines de l'équation

$$(3)\quad 0=M_{p+1}x^{p+1}-\frac{p+1}{1}M_p x^p+\frac{p(p+1)}{1.2}M_{p-1}x^{p-1}\ldots\pm\frac{p+1}{1}M_1 x\pm M$$

sont toutes réelles, et il en est donc de même de celles de l'équatio

$$(4)\quad \ldots\ldots\quad 0=M_{p+1}x^2-2M_p x+M_{p-1};$$

en effet, le second membre de cette dernière équation ne diffère qu par un facteur constant de la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction qu constitue le second membre de l'équation (3). De la réalité des ra cines de (4) on conclut à l'inégalité

$$M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}\geqq 0;$$

'expression $M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}$ ne s'annule que lorsque les deux racine de l'équation (4) sont égales entre elles. A cet effet il faut et i suffit que toutes les racines de (3), donc aussi toutes celles de (2) soient égales entre elles, d'où l'on conclut que toutes les racines d 'équation $f(x)=0$ sont égales entre elles, c. à. d. que $a_1=a_2=\ldots=a_k$

Par conséquent lorsque M_{p+1} ne s'annule pas, l'expressio $M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}$ est toujours positive, excepté au cas ou $a_1=a_2=\ldots=a_k$ car alors elle s'annule.

Dans le deuxième cas l'expression $M_p^2-M_{p-1}M_{p+1}$ est évidem ment positive.

Enfin dans le troisième cas cette expression est nulle et l'équatio (2) a au moins deux racines nulles, de sorte que l'équation $f(x)=$ a au moins $k-p+1$ racines nulles; en d'autres termes, dans c cas au moins $k-p+1$ des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ s'annulent.

Nous venons de donner la démonstration complète du théorèm

ces équations jointes à l'hypothèse faite au sujet de
de M_0 me permettent d'écrire

$$a'_p = \frac{M_p}{M_{p-1}}.$$
$$(p = 1, 2, 3, \ldots, k)$$

Il s'ensuit que

$$a'_p - a'_{p+1} = \frac{M_p^2 - M_{p-1} M_{p+1}}{M_{p-1} M_p},$$

donc

$$a'_p \geqq a'_{p+1},$$

et si l'on exclut aussi la valeur 0 des nombres a_1, a_2
peut avoir $a'_1 = a'_{p+1}$, à moins que $a_1 = a_2 = \ldots =$
dernier cas n'a lui aussi aucune importance nous po
convénient l'écarter; nous avons donc

(6) . . . . $a'_1 > a'_2 > a'_3 > a'_4 > \ldots > a'_k,$

tandis qu'on tire immédiatement des équations (5):

(7) . . . . $a_1 a_2 a_3 \ldots a_k = a'_1 a'_2 a'_3 \ldots a'_k.$

Or, on a évidemment

$$a'_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k}{k},$$

$$a'_k = \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_k}};$$

et si nous supposons qu'aucun des nombres a_1, a_2,
supérieur à a_1 ni inférieur à a_k, il s'ensuit que

$$a'_1 \leqq \frac{(k-1)\, a_1 + a_k}{k} < a_1,$$

$$a'_k > a_1,$$

nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nous avons déduit les nombres $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ et si des nombres $a''_1, a''_2, \ldots, a''_k$ nous déduisons de la même manière les nombres $a'''_1, a'''_2, \ldots, a'''_k$, etc., nous avons donc

$$a_1 > a'_1 > a'_2 > \ldots > a'_k > a_k,$$
$$a'_1 > a''_1 > a''_2 > \ldots > a''_k > a'_k,$$
$$a''_1 > a'''_1 > a'''_2 > \ldots > a'''_k > a''_k,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 < a'_1 - a'_k < \frac{k-1}{k}(a_1 - a_k),$$

$$0 < a''_1 - a''_k < \frac{k-1}{k}(a'_1 - a'_k) < \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 (a_1 - a_k),$$

$$0 < a'''_1 - a'''_k < \frac{k-1}{k}(a''_1 - a''_k) < \left(\frac{k-1}{k}\right)^3 (a_1 - a_k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 a_2 \ldots a_k = a'_1 a'_2 \ldots a'_k = a''_1 a''_2 \ldots a''_k = a'''_1 a'''_2 \ldots a'''_k = \ldots.$$

Les équations correspondantes pour le $n^{\text{ième}}$ groupe de nombres déduit des groupes précédents, c. à. d. pour les nombres $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}$, sont

$$a_1^{(n-1)} > a_1^{(n)} > a_2^{(n)} > \ldots > a_k^{(n)} > a_k^{(n-1)},$$

$$0 < a_1^{(n)} - a_k^{(n)} < \left(\frac{k-1}{k}\right)^n (a_1 - a_k),$$

$$a_1 a_2 \ldots a_k = a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots a_k^{(n)}.$$

Or, comme l'expression

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^n,$$

lorsque n augmente indéfiniment, finit par devenir aussi petite qu'on le désire, il s'ensuit que les nombres $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}$ convergent

Premier exemple. $k=3$.

$$a_1 = 5, \qquad a_2 = 5, \qquad a_3 = 4,$$

$$a_1' = \frac{14}{3}, \qquad a_2' = \frac{65}{14}, \qquad a_3' = \frac{60}{13},$$

$$a_1'' = \frac{7603}{1638}, \qquad a_2'' = \frac{35290}{7673}, \qquad a_3'' = \frac{1638}{3529}$$

ou

$$a_1'' = 4.64163\ 61416\ 36\ldots,$$

$$a_2'' = 4.64158\ 88465\ 08\ldots,$$

$$a_3'' = 4.64154\ 15131\ 77\ldots.$$

On voit avec quelle rapidité les nombres d'un viennent égaux les uns aux autres; en effet

$$a_1' - a_2' = 0.02380\ 95\ldots,$$

$$a_2' - a_3' = 0.02747\ 25\ldots,$$

$$a_1'' - a_2'' = 0.00004\ 72951\ 38\ldots,$$

$$a_2'' - a_3'' = 0.00004\ 73333\ 31\ldots.$$

La moyenne des valeurs obtenues pour les nom groupe, déduits du premier, est

$$a_1''' = 4.64158\ 88337\ 74\ldots.$$

Nous verrons plus tard que la différence $a_1''' - a$ 0.00000 00003. La limite est ici

$$\sqrt[3]{100} = 4.64158\ 88336\ 12769\ldots.$$

Deuxième exemple. $k=4$.

$$a_1 = 3, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = 2,$$

$$a_1' = \frac{9}{4}, \qquad a_2' = \frac{20}{9}, \qquad a_3' = \frac{11}{5},$$

$$a_1'' = \frac{17531}{7920}, \qquad a_2'' = \frac{116410}{52593}, \qquad a_3'' = \frac{128826}{58205},$$

et

$$a'_1 - a'_2 = 0.02777\ 78\ldots,$$
$$a'_2 - a'_3 = 0.02222\ 22\ldots,$$
$$a'_3 - a'_4 = 0.01118\ 18\ldots,$$
$$a''_1 - a''_2 = 0.00009\ 76697\ 0\ldots,$$
$$a''_1 - a''_3 = 0.00009\ 74240\ 1\ldots,$$
$$a''_3 - a''_4 = 0.00009\ 71786\ 0\ldots.$$

Des valeurs de a''_1, de a''_2, de a''_3 et de a''_4 on tire

$$a'''_1 = 2.21336\ 38420\ 8\ldots.$$

La limite est ici

$$\sqrt[4]{24} = 2.21336\ 38394\ 007\ldots.$$

5. Dans les deux exemples donnés on voit que non seulemen les différences successives des nombres d'un même groupe telles qu

$$a'_1 - a'_2,\ a'_2 - a'_3,\ \ldots$$
$$a''_1 - a''_2,\ a''_2 - a''_3,\ldots$$

deviennent de plus en plus petites lorsqu'on passe aux groupes sui vants, mais aussi que les différences appartenant à un même group tendent de plus en plus vers une même valeur.

En effet, on peut énoncer le théorème suivant.

Pour $n = \infty$ le quotient de deux quelconques des $(k-1)$ différence

$$a_p^{(n)} - a_{p+1}^{(n)}$$
$$(p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ k-1)$$

tend vers la limite 1.

Parmi les différentes preuves de cette propriété que j'ai trouvée la suivante est de beaucoup la plus simple.

6. Je pose

$$a_1 - a = x_1$$

de sorte qu'il est impossible que deux des nombr
aient la même valeur. Soit encore

$$(9) \quad . \quad . \quad \begin{cases} f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_k), \\ f(x) = \mathrm{N}_0\, x^k - \frac{k}{1}\mathrm{N}_1\, x^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\mathrm{N}_0\, x^{k-} \end{cases}$$

les nombres N_0, N_1, ..., N_k sont donc formés à l'ai
x_1, x_2, ..., x_k de la même manière que les nombr
ont été formés à l'aide des grandeurs a_1, a_2, ...,
biguité ne peut résulter du fait que $f(x)$ a ici dans
signification que dans le n⁰ 2. On se convainc
nombres M_0, M_1, ..., M_k peuvent être exprimés de
à l'aide de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées:

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \mathrm{M}_k = f(a), \\ k\,\mathrm{M}_{k-1} = f'(a) \\ k(k-1)\,\mathrm{M}_{k-2} = f''(a) \\ \dots\dots\dots\dots \\ k(k-1)\dots 3\,.\,2\,\mathrm{M}_1 = f^{(k-1} \\ k(k-1)\dots 3\,.\,2\,.\,1\,\mathrm{M}_0 = f^{(k)}(a \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a'_p = \frac{pf^{(k-p)}(a)}{f^{(k-p+1)}(a)}, \qquad (p = 1, 2, 3, \dots, k)$$

où il faut prendre $f^0(a) = f(a)$.

Au lieu de l'équation (11) on peut écrire

$$(12) \quad . \quad a'_p = \frac{\mathrm{N}_0\, a^p - \frac{p}{1}\mathrm{N}_1\, a^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2}\mathrm{N}_2\, a^{p-}}{\mathrm{N}_0\, a^{p-1} - \frac{(p-1)}{1}\mathrm{N}_1\, a^{p-1} + \frac{(p-1)(p-2}{1\,.\,2}}$$

En développant la formule du second membre
sances descendantes de a, on trouve pour les prem

ces racines sont par hypothèse rangées suivant leur ordre de gran-
deur, de sorte que

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_p.$$

Appelons de même $z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}$, grandeurs qui satisfont au
inégalités $z_1 < z_2 < \ldots < z_{p-1}$, les racines réelles et inégales de l'équa-
tion $f^{(k-p+1)}(x) = 0$; de sorte que z_1 est située entre y_1 et y_2,
entre y_2 et $y_3 \ldots$ et enfin z_{p-1} entre y_{p-1} et y_p. Il faut suppose
$p > 1$. On a alors suivant l'équation (11)

$$a'_p = \frac{(a-y_1)(a-y_2)\ldots(a-y_p)}{(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_{p-1})},$$

et, si l'on exécute la division et qu'on partage le quotient en frac-
tions simples, on aura suivant l'équation (13)

$$(14) \quad \ldots \ldots \quad a'_p = a - N_1 + \sum_{k=1}^{k=p-1} \frac{A_k}{a - z_k},$$

où

$$(15) \quad \ldots \quad A_k = \frac{(z_k - y_1)(z_k - y_2)\ldots(z_k - y_p)}{(z_k - z_1)\ldots(z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1})\ldots(z_k - z_{p-1})}.$$

Dans le numérateur de cette fraction qui représente A_k le
facteurs

$$(z_k - y_1)(z_k - y_2)\ldots(z_k - y_k)$$

sont tous positifs; les autres $(p-k)$ facteurs au contraire, c. à. d. le
facteurs

$$z_k - y_{k+1},\; z_k - y_{k+2},\; \ldots,\; z_k - y_p$$

sont tous négatifs.

Les facteurs négatifs du dénominateur de l'expression A_k sont

$$z_k - z_{k+1},\; z_k - z_{k+2},\; \ldots,\; z_k - z_{p-1};$$

leur nombre est de $p-k-1$. Le nombre des facteurs négatifs du

$$a'_p < a - N_1 + \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}}{a - z_1}$$

et que

$$a'_p > a - N_1 + \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}}{a - z_{p-1}}$$

Or, l'expression $A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}$ est évidemm
de $\frac{1}{a}$ dans le développement de a'_p suivant les pu
dantes de a; suivant (13) cette expression est
$-(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)$ et l'on a $a - z_1 < a - x_1 = a_1$, $a - z$
tandis qu'on a aussi, comme cela se voit aisémen

Il s'ensuit donc que

$$(16) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_p < a'_1 - \dfrac{(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)}{a_1}, \\ a'_p > a'_1 - \dfrac{(p-1)(N_1^2 - N_0 N_2)}{a_k}. \end{array} \right.$$

Pour $p = 1$ il faut évidemment remplacer les sig
le signe $=$.

7. Pour pouvoir déduire les inégalités (16) nous av
— et c'était une base essentielle de notre raisonne
que les grandeurs $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ sont toutes né
peut être démontré encore autrement.

Soit

$$g(x) = (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_p),$$

il s'ensuit évidemment que

$$a'_p = \frac{p\, g(a)}{g'(a)}$$

et que

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x - y_1} + \frac{1}{x - y_2} + \dots + \frac{1}{x - y_p}$$

Or, de l'équation $a'_p = \frac{p\,g(a)}{g'(a)}$ on peut tirer immédiatement

$$A_k = \frac{p\,g(z_k)}{g''(z_k)},$$

donc

$$\frac{p}{A_k} = -\frac{1}{(z_k - y_1)^2} - \frac{1}{(z_k - y_2)^2} - \dots - \frac{1}{(z_k - y_p)^2},$$

d'où il suit que A_k est négatif.

8. Si l'on remplace p par $p+1$ dans l'équation (16), on obtien en combinant les différentes inégalités

$$a'_p - a'_{p+1} < \frac{a_k + p(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}(N_1^2 - N_0 N_2),$$

$$a'_p - a'_{p+1} > \frac{a_1 - p(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}(N_1^2 - N_0 N_2),$$

donc à plus forte raison, attendu que p est tout au plus égal à $k-1$ et que les expressions $a_1 - a_k$ et $N_1^2 - N_0 N_2$ sont positives,

$$(17)\quad \dots \quad \left\{\begin{aligned} a'_p - a'_{p+1} &< \frac{a_k + (k-1)(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}(N_1^2 - N_0 N_2), \\ a'_p - a'_{p+1} &> \frac{a_1 - (k-1)(a_1 - a_k)}{a_1\, a_k}(N_1^2 - N_0 N_2). \end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de ces équations ne contiennent plus l nombre p.

Tous les développements antérieurs restent les mêmes, si l'o remplace les nombres $a_1, a_2, \dots, a_k$, par $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}$ et en mêm temps les nombres a'_1, a'_2, a'_k par $a_1^{(n+1)}, a_2^{(n+1)}, \dots, a_k^{(n+1)}$.

Or, comme nous avons déjà prouvé que les nombres $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_k^{(n)}$ tendent tous pour $n=\infty$ vers une même limite positive, on peu apparemment toujours donner à n une grandeur telle que l'expressio

grandeurs entre lesquelles est située l'expression

$$\frac{a_p^{(n+1)} - a_{p+1}^{(n+1)}}{a_q^{(n+1)} - a_{q+1}^{(n+1)}}$$

diffèrent de l'unité aussi peu qu'on le désire.

Nous avons donc démontré ce qui a été avancé au

9. Pour simplifier les formules, je remplacerai $a_p^{(n)}$ par b_p et $a_p^{(n+1)}$ par b'_p.

On a donc dans ce cas-là

$$b'_1 - b'_k = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}{k} - \frac{k}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots}$$

ou

$$k\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \ldots + \frac{1}{b_k}\right)(b'_1 - b'_k) = \begin{array}{l} \quad 1 + \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \\ + \frac{b_1}{b_2} + 1 + \frac{b_3}{b_2} + \\ + \frac{b_1}{b_3} + \frac{b_2}{b_3} + 1 + \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \frac{b_1}{b_k} + \frac{b_2}{b_k} + \frac{b_3}{b_k} + \end{array}$$

Le second membre peut s'écrire

$$= \Sigma\left(\frac{b_p}{b_q} + \frac{b_q}{b_p} - 2\right) = \Sigma \frac{(b_p - b_q)^2}{b_p b_q},$$

où p et q acquièrent successivement toutes les valeu avec cette condition qu'on aura toujours $p > q$.

Si l'on divise les deux membres par $(b_1 - b_k)^2$ et limite pour $n = \infty$, on trouve, attendu que d'après

Or,

$$\begin{aligned}\Sigma (p-q)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k-1)^2 + \\ + 1^2 + 2^2 + \ldots + (k-2)^2 + \\ + 1^2 + \ldots + (k-3)^2 + \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + 1^2,\end{aligned}$$

ou, après réduction,

$$\Sigma (p-q)^2 = \frac{1}{12} k^2 (k^2 - 1),$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{b'_1 - b'_k}{(b_1 - b_k)^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{k+1}{k-1}\right) \times \frac{1}{b},$$

ou

$$(19) \quad . \quad . \quad . \quad \lim_{n=\infty} \frac{a_1^{(n+1)} - a_k^{(n+1)}}{(a_1^{(n)} - a_k^{(n)})^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)(a_1\, a_2 \ldots a_k)^{-\frac{1}{k}}.$$

10. Cette formule (19) donne une idée nette de la rapidité ave laquelle les nombres convergent finalement vers leur limite commun $\sqrt[k]{a_1\, a_2 \ldots a_k}$. Il paraît que le rapport de la différence $a_1^{(n+1)} - a_k^{(n+}$ à la deuxième puissance de l'expression $a_1^{(n)} - a_k^{(n)}$ est fini.

Dans le premier exemple du n⁰ 4 nous avions

$$a''_1 - a''_3 = 0.00009\ 4628 \ldots;$$

nous pouvons prendre maintenant comme valeur approchée de l différence $a'''_1 - a'''_3$ l'expression

$$\frac{1}{6}\ \frac{(a''_1 - a''_3)^2}{a''_2};$$

et comme les nombres a'''_1, a'''_2 et a'''_3 forment à fort peu près une pro gression arithmétique, il faut ajouter à

$$a'''_1 = 4.64158\ 88337\ 74 \ldots$$

si elle est supérieure à π la limite a la valeur

$$-\sqrt{r_1 r_2}\, e^{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)i}.$$

Si l'on pose par exemple

$$a_1 = z,\ a_2 = \frac{1}{z},$$

la limite sera $+1$, lorsque la partie réelle de z est p
que cette partie est négative.

Comme les expressions

$$a_1,\ a_1',\ a_1'',\ a_1'''\ldots$$

sont toutes ici des fonctions rationnelles de z, la s

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots,$$

où

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_1' - a_1,\ b_3 = a_1'' - a_1',\ b_4 = a_1''' -$$

est composée d'une infinité de termes qui sont to
rationnelles de z. Cette somme tend vers une limite
toutes les valeurs de z dont la partie réelle n'est
limite est $+1$ lorsque la partie réelle de z est pos
est négative.

Une série de ce genre a été donnée par Weie
article fort important Zur Functionenlehre, publié
berichte der Königl. Preuss. Akademie der Wisse
p. 735.

Peu après Tannery a remarqué qu'on peut form
logues en suivant une méthode fort simple (Consul
richte, 1881, p. 228 et suiv.).

On apercevra aisément que notre série est com
particulier dans celles que Weierstrass donne dan
la p. 230. (Il faut y corriger une faute d'impres

IX.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 193—195.)

Over het quadratische rest-karakter van het getal 2.

1. Zij p een oneven priemgetal. De getallen kleiner dan p, me
uitzondering van $p-1$,

$$1, 2, 3, \ldots, p-2$$

kunnen in twee groepen verdeeld worden, al naar gelang ze qua
dratische resten of niet-resten van p zijn. De eerste groep

A) . . . . $a, a', a'', \ldots$

bevat dan al de resten, de tweede groep

B) . . . . $b, b', b'', \ldots$

alle niet resten, die onder de getallen $1, 2, 3, \ldots, p-2$ voorkomen. I
dus $p-1$ of -1 quadratische rest, dan bevat de groep (A) all
resten van p behalve $p-1$, en de groep (B) bestaat uit de geza
menlijke niet-resten van p. Is daarentegen -1 quadratische niet
rest, dan bestaat de groep (A) uit alle resten, de groep (B) uit all
niet-resten met uitzondering van $p-1$. In het eerste geval beva
dus de groep (A) $\frac{p-3}{2}$, de groep (B) $\frac{p-1}{2}$ getallen, in het tweed
geval bevat (A) $\frac{p-1}{2}$, (B) $\frac{p-3}{2}$ getallen.

De getallen van een paar zijn altijd ongelijk; w volgen $b^2 \equiv 1$, dus $b = 1$ of $b = p - 1$, maar het rest nooit in de groep (B) voor, terwijl $p - 1$ n in (B) voorkomt.

Is dus het geheele aantal $\frac{p-1}{2}$ der niet-reste van den vorm $4n + 1$, dan bevat (B) alle niet-reste is dus rest van p. Is daarentegen $\frac{p-1}{2}$ oneven, $4n + 3$, dan is noodzakelijk -1 niet-rest van p.

Te gelijk volgt nu:

voor $p = 4n + 1$: (A) bevat alle resten behalve d aantal der getallen (A) is $2n - 1$; (B) bevat alle aantal is $2n$;

en voor $p = 4n + 3$: (A) bevat alle resten; hun aa bevat alle niet-resten behalve de niet-rest $p - 1$; getallen (B) is $2n$.

2. Door bij alle getallen $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots$ tellen, ontstaan de groepen van getallen

(A′) . . . . $a + 1,\ a' + 1,\ a'' + 1, \ldots$

(B′) . . . . $b + 1,\ b' + 1,\ b'' + 1, \ldots,$

die te zamen alle getallen

$$2,\ 3,\ 4, \ldots, p - 1$$

vormen; zoodat in (A′) en (B′) te zamen voorkome

resten en nog $\frac{p-3}{2}$ resten van p, namelijk alle res

Het aantal der getallen (B′) is even, en onder de komen evenveel resten als niet-resten van p voor.

In verband met het voorgaande volgt, dat voor $p = 4n + 1$
groep (B′) bestaat uit

$$\frac{p-1}{4} = n \text{ resten en uit } \frac{p-1}{4} = n \text{ niet-resten},$$

en derhalve de groep (A′) uit

$$\frac{p-5}{4} = n-1 \text{ resten en uit } \frac{p-1}{4} = n \text{ niet-resten}.$$

Is echter $p = 4n + 3$, dan bevat de groep (B′)

$$\frac{p-3}{4} = n \text{ resten en } \frac{p-3}{4} = n \text{ niet-resten},$$

derhalve bevat de groep (A′)

$$\frac{p-3}{4} = n \text{ resten en } \frac{p+1}{4} = n+1 \text{ niet-resten}.$$

3. Het quadratische rest-karakter van 2 kan nu als volgt bepa
worden. De gevallen $p = 4n + 1$, $p = 4n + 3$ moeten afzonder
behandeld worden.

I. $p = 4n + 1$.

In dit geval bevat (B) alle niet-resten van p, dus heeft men

$$(x-b)(x-b')(x-b'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Stelt men hierin $x = -1$ dan volgt

$$(b+1)(b'+1)(b''+1)\ldots \equiv 2 \qquad (\text{mod}\, p).$$

Maar volgens n⁰ 2 komen n niet-resten voor onder de $2n$ geta
$b+1$, $b'+1, \ldots,$ terwijl de overige resten zijn.

II. $p = 4n + 3$.

In dit geval bevat (A) alle resten van p, dus hee

$$(x - a)(x - a')(x - a'') \ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \qquad (\mathrm{m}$$

Stelt men hierin $x = -1$, dan volgt

$$(a + 1)(a' + 1)(a'' + 1) \ldots \equiv 2 \qquad (\mathrm{mod}\ p$$

Maar volgens n⁰ 2 komen $n + 1$ niet-resten voor
getallen $a + 1$, $a' + 1, \ldots,$ terwijl de overige resten

Is dus n even of

$$p = 8k + 3,$$

dan is 2 niet-rest van p.

Is n oneven of

$$p = 8k + 7,$$

dan is 2 rest van p.

IX.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 193—195.)

(traduction)

Le nombre 2 comme résidu quadratique.

1. Supposons que p représente un nombre premier impair. Le[s] nombres inférieurs à p, à l'exception de $p-1$, c. à d. les nombre[s]

$$1, 2, 3, \ldots, p-2$$

peuvent être divisés en deux groupes, dont l'un est formé des résidu[s] quadratiques de p, l'autre des non-résidus de ce nombre. Le premie[r] groupe

(A) . . . . $a, a', a'', \ldots$

contient donc tous les résidus, le deuxième

(B) . . . . $b, b', b'', \ldots$

tous les non-résidus compris dans les nombres $1, 2, 3, \ldots, p-2$. Lorsque $p-1$ ou -1 est un résidu quadratique, le groupe (A) contient donc tous les résidus de p excepté $p-1$, et le groupe (B) tous les non-résidus de p. Mais lorsque -1 est un non-résidu, le groupe (A) se compose de tous les résidus et le groupe B de tous les non-résidus à l'exception de $p-1$. Dans le premier cas le groupe (A) contient donc $\frac{p-3}{2}$ et le groupe (B) $\frac{p-1}{2}$ nombres, dans le deuxième

Les nombres appartenant à un même couple sont
entre eux, en effet, de $b = b'$ on pourrait tirer $b^2 \equiv$
$b = p - 1$; mais le nombre 1 qui est un résidu ne
du groupe (B), tandis que le nombre $p - 1$ ne
groupe (A) ni du groupe (B).

Lorsque le nombre total $\frac{p-1}{2}$ des non-résidu
lorsque p a la forme $4n + 1$, le groupe (B) conti
non résidus de p et -1 est un résidu de p. Mais l
$\frac{p-1}{2}$ est impair et que p a la forme $4n + 3$, le
nécessairement un non-résidu de p.

On arrive en même temps aux conclusions suiv

a) lorsque $p = 4n + 1$: le groupe (A) contient tous l
le résidu $p - 1$; le nombre des termes du group
le groupe (B) renferme tous les non-résidus; leur

b) lorsque $p = 4n + 3$: le groupe (A) contient tous
nombre est $2n + 1$; le groupe (B) contient tous les n
le non-résidu $p - 1$; le nombre des termes du gro

2. Lorsqu'on ajoute l'unité à tous les nombres a, a'
on obtient les groupes suivants de nombres

(A') . . . . $a + 1,\ a' + 1,\ a'' + 1, \ldots$

(B') . . . . $b + 1,\ b' + 1,\ b'' + 1, \ldots,$

ces deux groupes ensemble contiennent tous les n

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ p - 1.$$

Il s'ensuit que les groupes (A') et (B') ensembl
$\frac{p-1}{2}$ non-résidus et encore $\frac{p-3}{2}$ résidus de p, c. à
excepté l'unité.

Le nombre des termes du groupe (B') est pair et

et comme b est un non-résidu, l'un des nombres $b+1$, $b'+1$ est u résidu, l'autre un non-résidu.

Eu égard à ce qui précède, on peut en déduire que pour $p=4n+$ le groupe (B') se compose de

$$\frac{p-1}{4}=n \text{ résidus et de } \frac{p-1}{4}=n \text{ non résidus},$$

et le groupe (A') par conséquent de

$$\frac{p-5}{4}=n \text{ résidus et de } \frac{p-1}{4}=n \text{ non-résidus.}$$

Mais lorsque $p=4n+3$, le groupe (B') contient

$$\frac{p-3}{4}=n \text{ résidus et } \frac{p-3}{4}=n \text{ non-résidus},$$

et le groupe (A') par conséquent

$$\frac{p-3}{4}=n \text{ résidus et } \frac{p+1}{4}=n+1 \text{ non-résidus.}$$

3. Le caractère du nombre 2 comme résidu ou non-résidu peu maintenant être déterminé de la manière suivante. Les cas $p=4n+$ et $p=4n+3$ doivent être traités séparément.

I. $p=4n+1$.

Dans ce cas le groupe (B) contient tous les non-résidus de p, o a donc

$$(x-b(x-b')(x-b'')\ldots\equiv x^{\frac{p-1}{2}}+1 \qquad (\operatorname{mod} p).$$

En y substituant à x la valeur -1, on trouve

$$(b+1(b'+1)(b''+1)\ldots\equiv 2 \qquad (\operatorname{mod} p).$$

Mais lorsque n est impair, c. à d. lorsque

$$p = 8k + 5,$$

le nombre 2 est non-résidu de p.

II. $p = 4n + 3$.

Dans ce cas le groupe (A) contient tous les résid

$$(x - a)(x - a')(x - a'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

En y substituant à x la valeur -1, on trouv

$$(a + 1)(a' + 1)(a'' + 1)\ldots \equiv 2 \qquad (\mathrm{m}$$

Mais suivant le n^0 2 il y a $n + 1$ non-résidu
nombres $a + 1$, $a' + 1$, ..., tandis que les autres

Par conséquent lorsque n est pair, c. à d. lors

$$p = 8k + 3,$$

le nombre 2 est non-résidu de p.

Mais lorque n est impair, c. à d. lorsque

$$p = 8k + 7,$$

le nombre 2 est résidu du nombre p.

X.

Amsterdam, Versl. K. Akad. Wet., 1e sect., sér. 2, 17, 1882, 338—417

Bijdrage tot de theorie der derde- en vierde-machtsresten.

Het hoofdtheorema in de theorie der quadraatresten, de zooge
naamde wet van reciprociteit, heeft betrekking op de wederkeerig
verhouding van twee oneven priemgetallen, en in eene volledig
theorie moet daarom het karakter van het getal 2 als quadraatres
of niet-rest van een ander oneven priemgetal, afzonderlijk bepaal
worden. Het getal 2 blijkt hierdoor eene bijzondere plaats onde
alle priemgetallen in te nemen.

De theorema's, waardoor het karakter van 2 bepaald wordt, zij
het eerst door Fermat uitgesproken [1]) en door Lagrange [2]) bewezen
Hierbij moet echter vermeld worden dat het bewijs, door Lagrang
gegeven, op geheel analoge beschouwingen berust, als die waardoo
Euler [3]) reeds vroeger de theorema's bewezen had, die het karakte
van 3 als quadraatrest of niet-rest bepalen, en welke insgelijks reed
door Fermat waren uitgesproken. Het is daarom des te meer op
merkelijk, dat Euler steeds te vergeefs getracht heeft, de theorema'
omtrent het karakter van 2 te bewijzen (Vergel. Disq. Arithm., art. 120

Een geheel analoog verschijnsel doet zich voor in de theorie de
vierde-machtsresten. Ook hier heeft de algemeene reciprociteitswe
betrekking op twee oneven, d. w z. niet door $1 + i$ deelbare, priem

rum commentatio secunda, waarin voor het eerst
plexe getallen van den vorm $a + bi$ in de getallent
werden, is het biquadratisch karakter van $1 + i$
Het daar voorkomende bewijs is zuiver arithmetisch
wezenlijk op het theorema van art. 71, dat geheel
de hulpstelling, die den grondslag uitmaakt, zoowe
als van het vijfde Gaussische bewijs van de recipr
theorie der quadraatresten. (Theorematis arithmet
nova. Werke, II, p. 1 en Theorematis fundamental
residuis quadraticis demonstrationes et ampliatione
II, p. 47).

Zooals bekend is, heeft Gauss zijn voornemen
verhandeling de theorie der vierde-machtsresten to
te brengen door het bewijs te leveren van de alge
teitswet, die reeds in de tweede verhandeling o
uitgesproken is, niet ten uitvoer gebracht.

De eerste gepubliceerde bewijzen van dit fundam
zijn de beide van Eisenstein in het 28[ste] deel van
für Mathematik, p. 53 en 223. In het eerste stuk: L
wordt het karakter van $1 + i$ niet behandeld, wel in
Einfacher Beweis und Verallgemeinerung des Fund
für die biquadratischen Reste. Bij de daar voork
van het karakter van $1 + i$ wordt echter gebruik
vooraf bewezen algemeene reciprociteitswet, wat
minder schoon voorkomt, daar de overgang van het
tot het samengestelde toch stellig verlangt het kara
onafhankelijk van het fundamentaaltheorema af te

Hetzelfde geldt in meerdere of mindere mate
methoden, die later bekend gemaakt zijn om de th
machtsresten te behandelen, en voorzoover ik zie

Geheel analoge opmerkingen zijn te maken omtrent de theori der derde-machtsresten. Het eerste gepubliceerde bewijs van de doo Jacobi uitgesproken wet van reciprociteit in deze theorie is dat va Eisenstein in deel 27 van Crelle's Journal für Mathematik, p. 289 Het afzonderlijk te bepalen karakter van $1-\varrho$ (waarin ϱ een com plexe derde-machtswortel der eenheid) is eerst later gegeven doo Eisenstein in deel 28, p. 28 e. v. van hetzelfde tijdschrift. Bij dez afleiding wordt weder gebruik gemaakt van de algemeene wet va reciprociteit, en ik zie niet, dat tot dusver eene afleiding van he cubisch karakter van $1-\varrho$ gegeven is, waarvan dit niet gezegd ka worden.

Daar het nu toch wenschelijk voorkomt, eene afleiding te bezitte voor het karakter van $1+i$ en $1-\varrho$, geheel afgescheiden van d algemeene reciprociteitswetten, zoo is het misschien niet geheel va belang ontbloot om aan te toonen, dat al deze theorema's, di betrekking hebben op de priemgetallen 2, $1+i$, $1-\varrho$ en die to aanvulling der reciprociteitswetten noodzakelijk zijn, volgens een gelijkblijvende methode bewezen kunnen worden.

Het principe van deze methode bestaat daarin, het priemgeta waarvan het karakter te bepalen is, te vervangen door een congruen product van factoren Het karakter dezer factoren wordt dan bepaal door beschouwingen, geheel overeenkomstig aan die van Gauss i art. 15—20 van zijne eerste verhandeling over de theorie der vierde machtsresten (Werke, II, p. 78—87). Gauss beschouwt in deze ver handeling alleen reëele getallen, en het doel der verhandeling is d bepaling van het karakter van 2 in deze reëele theorie. Het blee mij echter, dat al de beschouwingen van Gauss bijna onverander ook in de theorie der complexe getallen herhaald kunnen worden en de bepaling van het biquadratisch karakter van $1+i$ volgt da

van een priemgetal van den vorm $a + bi$ (waarin b n
om zoo te zeggen mede geheel volbracht; terwijl eene
methode in het geval, dat de modulus een reëel prie
vorm $4n + 3$ is, tot hetzelfde doel gebezigd kan word
laatste geval eene veel eenvoudiger behandeling to
Gauss Werke, II, art 68), heb ik toch gemeend
zelfde wijze als de overige gevallen te moeten beh
zoodoende blijkt, dat de gebezigde methode in staat
dige theorema's af te leiden.

Nadat de bepaling van het biquadratisch karakt
gehandeld is, heb ik met behulp van de voorafgaande
alle theorema's bewezen, die Gauss door inductie g
art. 28 der Theoria residuorum biquadraticorum comm
opgesteld heeft. Voor zoover mij bekend, zijn deze
voor het eerst bewezen [1]. Dit bewijs steunt gehee
der complexe getallen, welke theorie hier dus gehee
dient, daar de theorema's zelf alleen betrekking he
getallen. Behalve de reprociteitswet in de theorie der
resten, waren voor het volledig bewijs nog de besc
art 19 en 20 noodzakelijk.

Ik zal nu beginnen met de afleiding van het ka
de theorie der

QUADRAATRESTEN.

1. Zij p een oneven priemgetal, de getallen

$$1, 2, 3, \ldots, p-1$$

zullen dan in twee groepen verdeeld worden. Tot

$$A \qquad a, a', a'', \ldots$$

staat uit $\frac{p-1}{2}$ volgens den modulus p incongruente getallen, en me ziet gemakkelijk, dat de beide congruenties:

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots &\equiv x^{\frac{p-1}{2}}-1 \\ (x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots &\equiv x^{\frac{p-1}{2}}+1\end{aligned}\right\} \pmod p$$

identieke congruenties zijn, want zij zijn van lageren graad dan de $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\text{den}}$ en bezitten beide blijkbaar $\frac{p-1}{2}$ wortels, namelijk de eerst de wortels $x=\alpha$, $x=\alpha'$, $x=\alpha''$, ..., de tweede de wortels $x=\beta$ $x=\beta'$, $x=\beta''$, ...

Door bij de getallen van A en B de eenheid op te tellen ontstaan de volgende beide groepen getallen:

A′	$\alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1,\ \ldots$
B′	$\beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1,\ \ldots$

De aantallen getallen van de groep A′, die in A en B voorkomen noem ik nu respectievelijk (0.0), (0.1), en de aantallen getallen van B′, die in A en B voorkomen, respectievelijk (1.0), (1.1).

Deze vier getallen kunnen in het volgende schema S vereenig worden:

$$\begin{matrix}(0.0) & (0.1)\\ (1.0) & (1.1)\end{matrix}$$

Daar de priemgetallen van de vormen $p=4n+1$ en $p=4n+3$ zich verschillend gedragen, moeten deze beide gevallen afzonderlijk behandeld worden. Ik begin met het eerste.

2. Voor $p=4n+1$ is -1 quadraatrest, zoodat de getallen α en $p-\alpha$ tegelijkertijd in A voorkomen. Evenzoo komen de getallen β en $p-\beta$ gelijktijdig in β voor.

Nu is (0.0) blijkbaar gelijk aan het aantal oplossingen van de con-

Op gelijke wijze omtrent de aantallen (0.0), (1.0), (
blijkt, dat het

teeken	voorstelt het aantal oplossingen van	
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	(mod p
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	

Men ziet hieruit onmiddellijk, dat

$$(0.1) = (1.0)$$

is; eene tweede betrekking tusschen de getallen va
vert de volgende beschouwing Bij elk getal β va
hoort één bepaald getal van die zelfde groep β'',

$$\beta \beta'' \equiv 1 \pmod p$$

en tevens is dan $\beta \beta'$ congruent met een getal α
Door vermenigvuldiging van de congruentie

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

met β'' volgt dus

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0$$

en door deze laatste congruentie met β te verme
krijgt men de eerste terug. Hieruit valt onmidde
dat (1.1) = (0.1) is, zoodat het schema S dezen vo

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j \end{matrix}$$

Nu komt in de groep A het getal $p-1$ dus in A
welk laatste getal noch in A noch in B voorkomt.
tallen van A′ en B′ echter komen, zooals evide
in B voor.

Hieruit volgt

$$h + j = \frac{p-1}{\ldots} - 1$$

De identieke congruentie

$$(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}}+1 \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

geeft nu voor $x=-1$, daar $\frac{p-1}{2}$ even is

$$(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\ldots \equiv 2 \qquad (\mathrm{mod}\, p).$$

Het aantal niet-resten onder de getallen $\beta+1$, $\beta'+1$, $\beta''+1$, . .
is nu $(1.1)=j=\frac{p-1}{4}$.

Is dus j even of

$$p=8n+1,$$

dan is 2 quadraatrest van p.

Is daarentegen j oneven of

$$p=8n+5,$$

dan is 2 niet-rest van p.

3. Voor $p=4n+3$ is -1 niet-rest, en de groep B komt overee
met de groep getallen $p-\alpha$, $p-\alpha'$, $p-\alpha''$, . . .

Het teeken (0.0) stelt nu voor het aantal oplossingen van de con
gruentie $\alpha+1\equiv\alpha'$ (mod p), of ook daar $\alpha'=p-\beta$ is, het aantal op
lossingen van $\alpha+\beta+1\equiv 0$.

Op deze wijze blijkt, dat het

teeken	voorstelt het aantal oplossingen van
(0.0)	$\alpha+\beta+1\equiv 0$
(0.1)	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$ (mod p),
(1.0)	$\beta+\beta'+1\equiv 0$
(1.1)	$\beta+\alpha+1\equiv 0$

derhalve is $(0.0)=(1.1)$. Is verder weder $\beta\beta''\equiv 1$, $\beta'\beta''\equiv\alpha$, dan volg
uit $\beta+\beta'+1\equiv 0$ door vermenigvuldiging met β''

overigens alle getallen van A′ en B′ òf in A òf i
zoo volgt

$$h + j = \frac{p-1}{2},$$

$$2h = \frac{p-1}{2} - 1,$$

dus

$$h = \frac{p-3}{4}, \qquad j = \frac{p+1}{4}.$$

Uit de congruentie

$$(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1$$

volgt voor $x = -1$ daar $\frac{p-1}{2}$ oneven is,

$$(\alpha+1)(\alpha'+1)(\alpha''+1)\ldots \equiv 2 \qquad \text{(mo}$$

en het aantal niet-resten onder de getallen $\alpha + 1$, α'

dus $(0.1) = j = \frac{p-1}{4}$.

Is dus j even of

$$p = 8n + 7,$$

dan is 2 quadraatrest van p.

Is daarentegen j oneven of

$$p = 8n + 3,$$

dan is 2 niet-rest van p.

Nadat hiermede dus het karakter van 2 als qua
rest ten opzichte van een willekeurig oneven priem
ga ik er toe over het overeenkomstige te ontwikke
der

VIERDE-MACHTSRESTEN.

4. Het oneven (d. w. z. niet door $1+i$ deel
$m = a + bi$ zal steeds primair, in den zin van G
worden, zo t a — en b volgens den modulus 4

ten tweede uit de complexe priemfactoren van de reëele priemgetallen van den vorm $4n+1$. Deze complexe priemgetallen zijn van den vorm $a+bi$, waarin b niet gelijk nul is, en worden door vermenigvuldiging met ééne bepaalde der vier eenheden $1, i, -1, -i$ primair. Zij kunnen verder in twee soorten onderscheiden worden al naar gelang, wanneer $a+bi$ primair is, $a-1$ en b beide door 4 deelbaar, of beide het dubbel van een oneven getal zijn.

Ik onderscheid hierna deze drie klassen van primaire priemgetallen

I. De reëele priemgetallen q van den vorm $4r+3$, negatief genomen.

II. De complexe priemgetallen van den vorm $4r+1+4si$.

III. De complexe priemgetallen van den vorm $4r+3+(4s+2)i$.

Het priemgetal (in de complexe theorie) zal steeds door M aangeduid worden, de norm van M door μ. Verder zal steeds p een reëel (positief) priemgetal van den vorm $4r+1$, q een reëel (positief) priemgetal van den vorm $4r+3$ voorstellen. De priemgetallen van de eerste soort zijn dus $M=-q$, $\mu=q^2$, voor de tweede en derde soort is $\mu=p$.

Ik merk nog op, dat voor de beide soorten I en II de norm μ van den vorm $8r+1$, en voor III van den vorm $8r+5$ is. Deze omstandigheid maakt, dat de beide eerste soorten van priemgetallen tot op zekere hoogte gemeenschappelijk behandeld kunnen worden.

De beschouwingen van het volgende art. 5 gelden nog gelijkelijk voor de drie klassen van priemgetallen.

5. Zij dan M het priemgetal, μ de norm. Een volledig systeem van incongruente, en niet door den modulus M deelbare getallen bestaat uit $\mu-1$ getallen, welke volgens hun biquadratisch karakte

Tot de eerste klasse A worden gebracht alle ge
het biquadratisch karakter 0, tot de groepen B
met het biquadratisch karakter 1, 2, 3.

Ten overvloede zij gezegd, dat hier het biqua
in den zin van Gauss genomen wordt, zoodat de
klassen gekarakteriseerd zijn door de congruentie

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1, \quad \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i, \quad \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1, \quad \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -$$

Ik zal mij echter, voor het gemak, eveneens v
ingevoerde symbool bedienen, en dus kunnen sc

$$\left(\left(\frac{\alpha}{\mathrm{M}}\right)\right)=1, \quad \left(\left(\frac{\beta}{\mathrm{M}}\right)\right)=i, \quad \left(\left(\frac{\gamma}{\mathrm{M}}\right)\right)=-1, \quad \left(\left(\frac{\delta}{\mathrm{M}}\right)\right.$$

Eindelijk zij eens vooral opgemerkt, dat in he
gruenties betrekking zullen hebben op den priemm
niet uitdrukkelijk een andere modulus is aangeg

Ik laat hier een voorbeeld volgen van de ver
(mod M), met uitzondering van de rest 0, in de vie
voor elk der drie soorten van priemgetallen, d
scheiden werden.

$$\mathrm{M}=-7, \qquad \mu=49.$$

A	$1,$	$-2,$	$-3,$	$-1,$	
	$3i,$	$i,$	$-2i,$	$-3i,$	
B	$1-2i,$	$-2-3i,$	$-3-i,$	$-1+2i,$	
	$-1+3i,$	$2+i,$	$3-2i,$	$1-3i,$	$-$
C	$-3+3i,$	$-1+i,$	$2-2i,$	$3-3i,$	
	$-2-2i,$	$-3-3i,$	$-1-i,$	$2+2i,$	
D	$3+2i,$	$1+3i,$	$-2+i,$	$-3-2i,$	$-$
	$1+2i,$	$-2+3i,$	$-3+i,$	$-1+2i,$	

$$\mathrm{M}=-3-8i, \qquad \mu=73.$$

	$4i,$	$4+3i,$	$4-i,$	$-4i,$	$-4-3i,$	$-4+$
C	$-3+i,$	$i,$	$3,$	$3-i,$	$-i,$	$-3,$
	$2i,$	$-2+3i,$	$-2+i,$	$-2i,$	$2-3i,$	$2-$
	$-3-i,$	$2-2i,$	$-3+2i,$	$3+i,$	$-2+2i,$	$3-2$
D	$-4-i,$	$2+i,$	$-2+5i,$	$4+i,$	$-2-i,$	$2-5$
	$4+2i,$	$1-i,$	$-3-3i,$	$-4-2i,$	$-1+i,$	$3+3$

$$M = -5+6i, \qquad \mu = 61.$$

	$1,$	$-3,$	$-2+i,$	$1+3i,$	$-2+2$
A	$-4,$	$1+i,$	$3+2i,$	$-3-i,$	$3-2$
	$-1-4i,$	$2+i,$	$2i,$	$-5,$	$4+$
	$1-i,$	$2-3i,$	$-1+3i,$	$-2-3i,$	4
B	$1-2i,$	$2,$	$5i,$	$1-4i,$	$-4+$
	$1+2i,$	$3-i,$	$2+2i,$	$-i,$	3
	$-2i,$	$5,$	$-4-i,$	$1+4i,$	$-2-$
C	$-1-3i,$	$2-2i,$	$-1,$	$3,$	$2-$
	$3+i,$	$-3+2i,$	$4,$	$-1-i,$	$-3-2$
	$-2-2i,$	$i,$	$-3i,$	$-1-2i,$	$-3+$
D	$2+3i,$	$-4i,$	$-1+i,$	$-2+3i,$	$1-3$
	$-1+4i,$	$4-i,$	$-1+2i,$	$-2,$	-5

Evenals in art. 1 overtuigt men zich onmiddellijk, dat de nu vol-
gende congruenties identiek zijn :

$$\left.\begin{aligned}
(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}-1\\
(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}-i\\
(x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+1\\
(x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+i
\end{aligned}\right\} \pmod{M},$$

waaruit voor $x=-1$ volgt, de gevallen $\mu=8n+1$ en $\mu=8n+5$

6. Laten wij nu verder de nieuwe groepen va
en D′ beschouwen, die ontstaan door bij de geta
D de eenheid op te tellen:

$$\begin{array}{ll} A' & \alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1,\ldots \\ B' & \beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1,\ldots \\ C' & \gamma+1,\ \gamma'+1,\ \gamma''+1,\ldots \\ D' & \delta+1,\ \delta'+1,\ \delta''+1,\ldots \end{array}$$

en noemen wij nu de aantallen getallen van A′,
met getallen van A, B, C, D, respectievelijk

(0.0), (0.1), (0.2), (0.3);

de aantallen getallen van B′, die congruent zijn
A, B, C, D, respectievelijk

(1.0), (1.1), (1.2), (1.3).

Evenzoo hebben de getallen

(2.0), (2.1), (2.2), (2.3)

betrekking op de groep C′ en de getallen

(3.0), (3.1), (3.2), (3.3)

op de groep D′.

Men kan al deze 16 getallen (0.0), (0.1), enz.
volgende quadratische schema S:

(0.0)	(0.1)	(0.2)	(0.3)
(1.0)	(1.1)	(1.2)	(1.3)
(2.0)	(2.1)	(2.2)	(2.3)
(3.0)	(3.1)	(3.2)	(3.3)

en voor de voorbeelden in art. 5 gegeven, verkr

$M = -7$, $\mu = 49$. $M = -3 - 8i$, $\mu = 73$. $M =$

	5	2	2	2		5	6	4	2
S	2	2	4	4		6	2	5	5
	2	4	2	4		4	5	4	5
	2	4	4	2		2	5	5	6

Volgens de congruenties van het voorgaande a

die respectievelijk tot de klassen A, B, C, D behooren, bedragen (3.0), (3.1), (3.2), (3.3), zoo volgt onmiddellijk, dat voor $\mu = 8n + 1$ het biquadratisch karakter van $1 + i$ volgens den modulus 4 congruent zal zijn met

$$(3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3)$$

en evenzoo voor het geval $\mu = 8n + 5$ met

$$(1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3).$$

Zoodra dus de getallen (0.0), (0.1), enz bepaald zijn, is hiermede ook onmiddellijk het biquadratisch karakter van $1 + i$ bekend.

Het komt er dus nu op aan, de getallen van het schema S onmiddellijk uit het gegeven primaire priemgetal $M = a + bi$ af te leiden. De hiertoe noodige beschouwingen zijn wezenlijk dezelfde als die van Gauss in art. 16—20 der Theoria residuorum biquadraticorum commentatio prima

Gauss handelt daar over de theorie der reëele getallen, maar het blijkt gemakkelijk, dat het daar gegevene in zeer nauw verband staat met het vraagstuk, dat ons hier bezig houdt.

Om de geheele ontwikkeling voor oogen te hebben, zal het noodig zijn hier de argumentatie van Gauss met de geringe noodige wijzigingen te laten volgen.

Hierbij valt ook nog op te merken dat, voor een priemgetal $M = -q$ tot de eerste klasse van art 4 behoorende, er in de reëele theorie van Gauss niets analoogs bestaat, met wat hier in de theorie der geheele complexe getallen ontwikkeld zal worden.

Voor de verdere beschouwingen is het in de eerste plaats noodig de beide gevallen, dat de norm μ van den vorm $8n + 1$ of van den vorm $8n + 5$ is, afzonderlijk te behandelen. Ik zal met het eerst genoemde geval, waarin dus het priemgetal M tot een der beide eerste klassen van art 4 behoort, beginnen.

elkander vervangen kunnen, als gelijk te bescho
het gemak van deze zienswijze gebruik maken,
eenige onduidelijkheid zal kunnen ontstaan

Daar dus het biquadratisch karakter van —
volgt, dat wanneer α, β, γ, δ respectievelijk tot
behooren, ook $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ in deze zelfde
en wel $-\alpha$ in A, $-\beta$ in B, $-\gamma$ in C en $-\delta$ in

Nu is blijkbaar het getal (0.0) gelijk aan het
van de congruentie

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \quad (\mathrm{mod\ M}),$$

waarbij α en α' op willekeurige wijze uit de gro
maar daar bij elk getal α' een getal $\alpha'' = p - \alpha'$
aantal oplossingen hetzelfde als dat van de con

$$\alpha + \alpha'' + 1 \equiv 0 \quad (\mathrm{mod\ M}),$$

waarin weder α en α'' uit A te nemen zijn.

Geheel op dezelfde wijze omtrent de getallen (
neerende, overtuigt men zich dat

het teeken	voorstelt het aantal oplossinge	
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	
(0.2)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	
(0.3)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$	
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	
(1.2)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$	
(1.3)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$	(m
(2.0)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$	
(2.1)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	

Hieruit volgen dus onmiddellijk deze zes betrekkingen:

$$(0.1)=(1.0), \qquad (0.2)=(2.0), \qquad (0.3)=(3.0),$$
$$(1.2)=(2.1), \qquad (1.3)=(3.1),$$
$$(2.3)=(3.2).$$

Vijf nieuwe betrekkingen tusschen de getallen (0.0), (0.1), enz. ver
rijgt men door de volgende beschouwing. Zijn α, β, γ getallen va
, B, C en bepaalt men x, y, z zoodanig dat

$$\alpha x \equiv 1, \; \beta y \equiv 1, \; \gamma z \equiv 1 \quad (\text{mod M})$$

s, dan behoort blijkbaar x tot de klasse A, y tot D, z tot C, zooda
nen kan schrijven

$$\alpha \alpha' \equiv 1, \; \beta \delta' \equiv 1, \; \gamma \gamma' \equiv 1.$$

Vermenigvuldigt men nu, terwijl men eene bepaalde oplossing va
$+\beta+1\equiv 0$ beschouwt, deze congruentie met δ dan volgt $\delta'+1+\delta\equiv$
vaarin $\delta'\equiv\alpha\delta$ tot D behoort. Ongekeerd volgt uit $\delta'+1+\delta\equiv 0$ doo
ermenigvuldiging met β weder $\alpha+\beta+1\equiv 0$. Hieruit blijkt dus, da
et aantal oplossingen van de beide congruenties

$$\alpha+\beta+1\equiv 0 \text{ en } \delta+\delta'+1\equiv 0$$

evengroot is, zoodat men heeft $(0.1)=(3.3)$.

Geheel op dezelfde wijze heeft men

$$\begin{aligned}
\gamma'(\alpha+\gamma+1) &\equiv \gamma''+1+\gamma, \\
\beta\,(\alpha+\delta+1) &\equiv \beta'+1+\beta, \\
\delta\,(\beta+\gamma+1) &\equiv 1+\beta'+\delta, \\
\gamma'(\beta+\gamma+1) &\equiv \delta+1+\gamma',
\end{aligned}$$

waaruit men op dezelfde wijze besluit tot

$$(0.2)=(2.2), \qquad (0.3)=(1.1), \qquad (1.2)=(1.3)=(2.3).$$

Hiermede zijn dus elf betrekkingen tusschen de zestien getalle
van het schema S gevonden, en deze getallen worden hierdo
teruggebracht tot vijf verschillende, die door h, j, k, l, m aangedui
zullen worden. Het schema S neemt nu deze gedaante aan:

$$\begin{array}{cccc}
h & j & k & l \\
j & l & m & m
\end{array}$$

8. Het getal -1 komt in A voor, waarmede d
A′ correspondeert. Dit getal 0 van A′ komt in
A, B, C, D voor, maar elk ander getal van A′ kom
der groepen A, B, C of D voor. Daar $\mu = 8n + 1$
zoo volgt dus

$$(0.0) + (0.1) + (0.2) + (0.3) = 2n - 1.$$

Alle getallen van B′, C′, D′ komen in één der k
voor, zoodat men heeft

$$(1.0) + (1.1) + (1.2) + (1.3) = 2n,$$
$$(2.0) + (2.1) + (2.2) + (2.3) = 2n,$$
$$(3.0) + (3.1) + (3.2) + (3.3) = 2n.$$

Deze vier vergelijkingen herleiden zich tot de v
trekkingen tusschen h, j, k, l en m

$$h + j + k + l = 2n - 1,$$
$$j + l + 2m = 2n,$$
$$k + m = n.$$

9. Eindelijk wordt nog eene verdere, niet line
tusschen h, j, k, l, m verkregen door de beschouwi
oplossingen der congruentie

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \pmod{M},$$

waarin α, β, γ op alle mogelijke wijzen uit de k
kiezen zijn.

Neemt men nu vooreerst voor α achtereenvolg
van A, dan gebeurt het respectievelijk h, j, k, l mal
A, B, C, D behoort en de enkele maal dat $\alpha + 1$
buiten beschouwing blijven, daar de congruentie
enkele oplossing toelaat.

Voor elke bepaalde der h waarden, die $\alpha + 1 \equiv \alpha_0$
nog verder β en γ zóó te kiezen, dat

Daar deze redeneering toepasselijk is voor elke der h waarden die maken, dat $\alpha + 1$ weder tot A behoort, zoo verkrijgt men op deze wijze hm oplossingen van de congruentie

$$1 + \alpha + \beta + \gamma \equiv 0.$$

Het gebeurt verder j malen, dat $\alpha + 1$ tot B behoort, en voor elke bepaalde waarde $\alpha + 1 \equiv \beta_0$ heeft de congruentie

$$\beta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

hetzelfde aantal oplossingen als de congruentie

$$1 + \alpha + \beta' \equiv 0,$$

dus is dit aantal gelijk j. Het gezegde blijkt onmiddellijk uit

$$\delta_0 (\beta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \alpha + \beta',$$

wanneer $\beta_0 \delta_0 \equiv 1$.

Deze waarden van α, die $\alpha + 1$ tot B doen behooren, geven dus in het geheel jj oplossingen van de beschouwde congruentie.

Voor $\alpha + 1 \equiv \gamma_0$, wat k malen gebeurt, heeft de congruentie

$$\gamma_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

oplossingen, want

$$\gamma'_0 (\gamma_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \delta + \alpha.$$

De waarden van α, die $\alpha + 1$ tot C doen behooren, leveren dus in het geheel kl oplossingen.

Is eindelijk $\alpha + 1 \equiv \delta_0$, wat l malen gebeurt, dan heeft de congruentie

$$\delta_0 + \beta + \gamma \equiv 0$$

wegens

$$\beta_0 (\delta_0 + \beta + \gamma) \equiv 1 + \gamma + \delta$$

m oplossingen, en deze waarden van α geven dus lm oplossingen.

Het totale aantal oplossingen van de congruentie

k, m, k, m oplossingen van de gegeven congruentie zijn, zoodat het totale aantal oplossingen bedraagt

$$jk + lm + mk + mm.$$

10. De gelijkstelling van deze beide uitdrukkingen voor het aantal oplossingen van $\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0$ geeft

$$0 = hm + jj + kl - jk - km - mm,$$

en h elimineerende met behulp van $h = 2m - k - 1$, welke waarde gemakkelijk uit de in art. 8 verkregen vergelijkingen tusschen h, j, k, l, m volgt, komt er

$$0 = (k - m)^2 + jj + kl - jk - kk - m.$$

Volgens de relaties in art. 8 is

$$k = \tfrac{1}{2}(j + l)$$

en deze waarde in $jj + kl - jk - kk$ overbrengende, wordt deze uitdrukking gelijk aan $\frac{1}{4}(l - j)^2$, zoodat de voorgaande vergelijking, na vermenigvuldiging met 4, overgaat in

$$0 = 4(k - m)^2 + (l - j)^2 - 4m,$$

maar men heeft

$$4m = 2(k + m) - 2(k - m) = 2n - 2(k - m),$$

dus is

$$2n = 4(k - m)^2 + 2(k - m) + (l - j)^2,$$

of wel

$$\mu = 8n + 1 = [4(k - m) + 1]^2 + 4(l - j)^2,$$

en stellende

$$4(k - m) + 1 = \mathrm{A}, \quad 2(l - j) = \mathrm{B},$$

vindt men

$$\mu = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2.$$

Hierin is $\mathrm{A} \equiv 1 \pmod 4$, en B even.

Men kan nu met behulp van A en B gemakkelijk h, j, k, l, m uitdrukken en verkrijgt zoodoende

$$\begin{aligned}
8h &= 4n - 3\mathrm{A} - 5, \\
8j &= 4n + \mathrm{A} - 2\mathrm{B} - 1, \\
8k &= 4n + \mathrm{A} - 1, \\
8l &= 4n + \mathrm{A} + 2\mathrm{B} - 1, \\
8m &= 4n - \mathrm{A} + 1.
\end{aligned}$$

$8n+1$ had; voor de verdere bepaling van A en B is het evenwe nu noodig, de gevallen I en II van art. 4 afzonderlijk te behandelen

11. Zij dan vooreerst

$$M = -q = -(4r+3).$$

In dit geval is

$$\mu = M^2 = q^2$$

en dus

$$q^2 = A^2 + B^2;$$

q een priemgetal van den vorm $4r+3$ zijnde, weet men dat q^2 op geen andere wijze als som van twee quadraten voorgesteld kan worden, dan door voor de basis van het eene (oneven) quadraat $\pm q$, voor die van het andere quadraat 0 te nemen; inderdaad wa geen der getallen A en B gelijk 0 of door q deelbaar, dan zou men een van 0 verschillend getal x kunnen bepalen, zoodat

$$A x \equiv B \pmod{q}.$$

Nu volgt uit $q^2 = A^2 + B^2$

$$A^2 \equiv -B^2 \pmod{q}$$

en daar men heeft

$$A^2 x^2 \equiv B^2 \pmod{q},$$

zou er volgen

$$x^2 \equiv -1 \pmod{q}.$$

Deze laatste congruentie nu is onmogelijk, omdat -1 quadratisch niet-rest van q is.

Uit $q^2 = A^2 + B^2$ volgt dus noodzakelijk

$$A = \pm q, \qquad B = 0$$

en daar $A \equiv 1 \pmod{4}$, zoo wordt hierdoor nog het teeken van A vol komen bepaald en is

$$A = -q = M.$$

Nadat op deze wijze A en B gevonden zijn, heeft men nu

$$\begin{aligned}
8h &= 4n - 3M - 5,\\
8j &= 4n + M - 1,\\
8k &= 4n + M - 1,\\
8l &= 4n + M - 1,\\
8m &= 4n - M + 1,
\end{aligned}$$

waarin $8n+1 = M^2$.

Door deze formules wordt dus de afhankelijkheid der getallen van het schema S van het priemgetal M op de eenvoudigste wijze uitgedrukt, voor het geval dat M tot de eerste klasse van art. behoort.

12. Is in de tweede plaats $M = a + bi$, waarin $a - 1 \equiv b \equiv 0 \pmod 4$ en de norm $\mu = a^2 + b^2$ een reëel priemgetal, dan is dus

$$\mu = a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

Nu kan een priemgetal van den vorm $4k + 1$ slechts op één wijze voorgesteld worden door de som van twee quadraten, en daar a en A beide $\equiv 1 \pmod 4$ zijn, zoo volgt $A = a$, $B = \pm b$.

Het teeken van B wordt door de volgende beschouwing bepaald waarbij het noodig is deze hulpstelling vooraf te bewijzen:

„Doorloopt z een volledig restsysteem (mod M) met uitzondering van den door M deelbaren term, dan is

$$\Sigma z^t \equiv -1 \quad \text{of} \quad \equiv 0 \quad (\text{mod } M),$$

naardat t door $\mu - 1$ deelbaar is of niet."

Het eerste gedeelte is duidelijk, want is t door $\mu - 1$ deelbaar, dan is $z^t \equiv 1$, dus $\Sigma z^t \equiv \mu - 1 \equiv -1$ (mod M).

Om ook het tweede gedeelte aan te toonen, zij g een primitieve wortel voor het priemgetal M, zoodat de waarden, die z doorloopt, congruent zijn met

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{\mu - 2}.$$

Hieruit volgt dus

$$\Sigma z^t \equiv 1 + g^t + g^{2t} + \ldots + g^{(\mu - 2)t} \qquad (\text{mod } M),$$

of

$$(1 - g^t)\, \Sigma z^t \equiv 1 - g^{(\mu - 1)t} \equiv 0 \qquad (\text{mod } M).$$

Is nu t niet door $\mu - 1$ deelbaar, dan is $1 - g^t$ niet door M deelbaar en dus $\Sigma z^t \equiv 0$, w. t. b. w

van z betrekking heeft als zooeven,

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \quad (\mathrm{mod}\ M).$$

Maar aan den anderen kant vormen de getallen z^2 in hun gehee
olijkbaar alle getallen van de groepen A en C te zàmen, elk deze
getallen tweemaal genomen. Van de getallen

$$z^2+1$$

behooren er dus

$$\begin{array}{ll} 2(0.0)+2(2.0) & \text{tot A}, \\ 2(0.1)+2(2.1) & \text{tot B}, \\ 2(0.2)+2(2.2) & \text{tot C}, \\ 2(0.3)+2(2.3) & \text{tot D}, \end{array}$$

en daar de $\left(\frac{\mu-1}{4}\right)^{\text{de}}$ machten der getallen van A, B, C, D respectievelij
congruent zijn met 1, i, -1, $-i$, zoo volgt dus

$$\begin{aligned} \Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv 2\ [(0.0)+(2.0)-(0.2)-(2.2)]+ \\ &\quad + 2i\,[(0.1)+(2.1)-(0.3)-(2.3)] \\ &\equiv 2\ (h-k)+2i\,(j-l), \end{aligned}$$

of de waarden van art. 10 invoerende, daar $A=a$ is,

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -a-1-Bi.$$

Uit de vergelijking met het eerste resultaat

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1$$

volgt nu

$$a+Bi \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ M=a+bi),$$

dus

$$B=b.$$

Hierdoor gaan dan ten slotte de waarden van h, j, k, l, m van
art. 10 over in

$$\begin{aligned} 8h &= 4n-3a-5, \\ 8j &= 4n+a-2b-1, \\ 8k &= 4n+a-1, \\ 8l &= 4n+a+2b-1, \\ 8m &= 4n-a+1, \end{aligned}$$

waarin dus $8n+1=a^2+b^2$ de norm is van het priemgetal M.

gehandeld zijn, moet nu het geval $\mu = 8n + 5$ beschouwd worden

Daar dan $\frac{\mu - 1}{4}$ oneven is, zoo behoort -1 tot de groep C, en zooals gemakkelijk te zien is, behooren de getallen

$$p - \alpha, \; p - \alpha', \; p - \alpha'', \ldots$$

alle tot C, en de getallen

$$p - \beta, \; p - \beta', \; p - \beta'', \ldots$$

alle tot D.

Met behulp van deze opmerkingen volgt nu zonder moeite, da

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van	
(0.0)	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0$	
(0.1)	$\alpha + \delta + 1 \equiv 0$	
(0.2)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	
(0.3)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	
(1.0)	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0$	
(1.1)	$\beta + \delta + 1 \equiv 0$	
(1.2)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	
(1.3)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	(mod M),
(2.0)	$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0$	
(2.1)	$\gamma + \delta + 1 \equiv 0$	
(2.2)	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0$	
(2.3)	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0$	
(3.0)	$\delta + \gamma + 1 \equiv 0$	
(3.1)	$\delta + \delta' + 1 \equiv 0$	
(3.2)	$\delta + \alpha + 1 \equiv 0$	
(3.3)	$\delta + \beta + 1 \equiv 0$,	

waaruit dan zes betrekkingen voortvloeien

$$(0.0) = (2.2), \quad (0.1) = (3.2), \quad (0.3) = (1.2),$$
$$(1.0) = (2.3), \quad (1.1) = (3.3),$$
$$(2.1) = (3.0).$$

Daar evenals vroeger $\alpha\alpha' \equiv \beta\delta \equiv \gamma\gamma' \equiv 1$, zoo heeft men

$$\gamma'(\alpha + \gamma + 1) \equiv \gamma'' + 1 + \gamma',$$
$$\beta\,(\alpha + \delta + 1) \equiv \beta' + 1 + \beta,$$
$$\delta\,(\alpha + \beta + 1) \equiv \delta' + 1 + \delta,$$
$$\delta\,(\beta + \gamma + 1) \equiv 1 + \beta' + \delta,$$
$$\gamma'(\beta + \gamma + 1) \equiv \delta + 1 + \gamma',$$

$$(0.0)=(2.0), \qquad (0.1)=1.3), \qquad (0.3)=(3.1),$$
$$(1.0)=(1.1)=(2.1).$$

Ten gevolge van deze elf betrekkingen neemt het schema S deze vorm aan

$$\begin{array}{cccc} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m. \end{array}$$

Daar -1 in de groep C, dus 0 in C′ voorkomt, zoo volgt geheel op dezelfde wijze als in art. 8

$$h+j+k+l=\frac{\mu-1}{4}=2n+1,$$
$$2m+l+j=2n+1,$$
$$h+m=n.$$

De beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie

$$\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0$$

levert eindelijk nog eene vergelijking tusschen h, j, k, l, m op. Neemt men eerst voor α alle waarden, die tot A behooren, dan gebeurt het respectievelijk h, j, k, l malen, dat $\alpha+1$ tot de groepen A, B, C, D behoort. En verder vindt men op dezelfde wijze als in art. 9, dat voor elk dezer gevallen de congruentie respectievelijk m, l, j, m oplossingen heeft, waaruit dus voor het totale aantal oplossingen volgt

$$hm+jl+kj+lm.$$

Neemt men daarentegen eerst voor β alle waarden van B, dan gebeurt het respectievelijk m, m, l, j malen, dat $\beta+1$ tot de groepen A, B, C, D behoort. En verder vindt men, dat voor elk dezer gevallen de congruentie respectievelijk h, m, h, m oplossingen heeft, zoodat het totale aantal oplossingen ook bedraagt

$$mh+mm+lh+jm.$$

14. De gelijkstelling van de beide uitdrukkingen voor het aantal oplossingen der congruentie

$$\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0 \quad (\text{mod } M)$$

geeft

$$0 = m^2 + lh + jm - jl - kj - lm,$$

of daar $k = 2m - h$ is, zooals uit de lineaire betrekkingen tusschen h, j, k, l, m in art. 13 dadelijk volgt,

$$0 = m^2 + lh + hj - jl - jm - lm.$$

Drukt men nu met behulp van $j + l = 1 + 2h$, j en l beide uit door hun verschil

$$2j = 1 + 2h + (j - l),$$

$$2l = 1 + 2h + (j - l);$$

dan gaat de voorgaande vergelijking door invoering van deze waarden over in

$$0 = 4m^2 - 4m - 1 + 4h^2 - 8hm + (j - l)^2,$$

of daar

$$4m = 2(h + m) - 2(h - m) = 2n - 2(h - m),$$

komt er

$$0 = 4(h - m)^2 - 2n + 2(h - m) - 1 + (j - l)^2$$

en eindelijk

$$\mu = 8n + 5 = [4(h - m) + 1]^2 + 4(j - l)^2,$$

dus voor

$$\mathrm{A} = 4(h - m) + 1, \quad \mathrm{B} = 2j - 2l,$$

heeft men

$$\mu = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2.$$

Met behulp van A en B kan men nu gemakkelijk h, j, k, l, m uitdrukken, als volgt

$$\begin{aligned}
8h &= 4n + \mathrm{A} - 1,\\
8j &= 4n + \mathrm{A} + 2\mathrm{B} - 3,\\
8k &= 4n - 3\mathrm{A} + 3,\\
8l &= 4n + \mathrm{A} - 2\mathrm{B} + 3,\\
8m &= 4n - \mathrm{A} + 1.
\end{aligned}$$

Er blijft nog over A en B te bepalen. Nu is μ als reëel priemgetal van den vorm $4n + 1$ slechts op één wijze voor te stellen door een som van twee tweedemachten, en daar

$$\mathrm{M} = a + bi$$

is, heeft men

$$\mu = a^2 + b^2,$$

waarin

$$A = -a \text{ en } B = \pm b.$$

Om het teeken van B te bepalen dient eene beschouwing analoog aan die in art. 12.

Men vindt gemakkelijk

$$\Sigma(z^3+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \equiv 2(h-k)+2i(j-l) \pmod{M}.$$

Nu is

$$2(h-k) = A-1, \quad 2(j-l) = B,$$

dus heeft men

$$-1 \equiv A-1+Bi,$$
$$0 \equiv A+Bi \quad (\text{mod } M = a+bi).$$

Daar nu reeds gevonden werd $A = -a$, zoo volgt $B = -b$ en ten slotte is dus

$$\begin{aligned} 8h &= 4n-a-1, \\ 8j &= 4n-a-2b+3, \\ 8k &= 4n+3a+3, \\ 8l &= 4n-a+2b+3, \\ 8m &= 4n+a+1. \end{aligned}$$

15. De verkregen resultaten samenstellende, is dus voor $\mu = 8n+1$ het schema S van den vorm

$$\begin{array}{cccc} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{array}$$

waarin:

voor $M = -q$

$$\begin{aligned} 8h &= 4n-3M-5, \\ 8j = 8k = 8l &= 4n+M-1, \\ 8m &= 4n-M+1. \end{aligned}$$

voor $M = a+bi$

$$\begin{aligned} 8h &= 4n-3a-5, \\ 8j &= 4n+a-2b-1, \\ 8k &= 4n+a-1, \\ 8l &= 4n+a+2b-1, \\ 8m &= 4n-a+1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m \end{array}$$

waarin

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1, \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3, \\ 8k &= 4n + 3a + 3, \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3, \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

Zooals uit deze formules blijkt, correspondeert de verandering van b in $-b$ met eene verwisseling van j en l, zoowel in het geval $\mu = 8n + 1$, als wanneer $\mu = 8n + 5$ is

Volgens de congruenties van art. 5 is nu voor $\mu = 8n + 1$ het karakter van $1 + i$ naar den mod 4 congruent met

$$(3.1) + 2(3.2) + 3(3.3) = 3m + 3j \equiv -m - j$$

en dat van $1 - i$ congruent met

$$(1.1) + 2(1.2) + 3(1.3) = l + 5m \equiv l + m$$

en dus vindt men voor $\mathrm{M} = -q$

$$\text{Karakter } (1 + i) \equiv -n = -\frac{q^2 - 1}{8},$$

$$\text{Karakter } (1 - i) \equiv \quad n = \quad \frac{q^2 - 1}{8}.$$

Nu zijn $\dfrac{q+1}{4}$ en $\dfrac{q-3}{4}$ geheele, op elkaar volgende getallen, dus is hun product even, en $\dfrac{(q+1)(q-3)}{8}$ door 4 deelbaar, zoodat men heeft

$$\frac{q^2 - 1}{8} \equiv \frac{q^2 - 1}{8} - \frac{(q+1)(q-3)}{8} = \frac{q+1}{4}.$$

Hieruit volgt

$$\left(\left(\frac{1+i}{\mathrm{M}}\right)\right) = i^{\frac{\mathrm{M}-1}{4}}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{\mathrm{M}}\right)\right) = i^{\frac{\mathrm{M}-1}{4}},$$

en daar -1 biquadratische rest is,

$$\left(\left(\frac{\quad}{M}\right)\right)=i \qquad , \qquad \left(\left(\frac{\quad}{M}\right)\right)=i \qquad ,$$

terwijl uit $2=(1-i)(1+i)$ nog volgt

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right)=\left(\left(\frac{-2}{M}\right)\right)=1.$$

Voor $M=a+bi$ daarentegen, is

$$-m-j=-n+\tfrac{1}{4}b,$$
$$l+m=\quad n+\tfrac{1}{4}b$$

en

$$n=\frac{a^2+b^2-1}{8}.$$

Nu is blijkbaar $\frac{a-1}{4}\cdot\frac{a+3}{4}$ even, dus $\frac{(a-1)(a+3)}{8}$ door 4 deelbaar, waaruit volgt

$$\frac{a^2-1}{8}\equiv\frac{-a+1}{4}\qquad(\bmod 4),$$

en b door 4 deelbaar zijnde, is dus één der getallen door b, $b\pm$ door 8 deelbaar, derhalve $\frac{b(b-4)}{8}$ door 4 deelbaar en

$$\frac{b^2}{8}\equiv\frac{b^2}{8}-\frac{b(b\mp 4)}{8}=\pm\tfrac{1}{2}b,$$

zoodat

$$n\equiv\tfrac{1}{4}(-a+1\pm 2b)\qquad(\bmod 4)$$

en ten slotte

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)=\left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right)=i^{\frac{a-1-b}{4}},$$

$$\left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right)=\left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right)=i^{\frac{-a+1-b}{4}},$$

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right)=i^{-\frac{b}{2}}.$$

Is eindelijk $\mu=8n+5$, $M=a+bi$, dan vindt men

Karakter $(1+i)\equiv(1\,.\,1)+2(1\,.\,2)+3(1\,.\,3)=m+2l+3j\qquad(\bmod 4$

Karakter $(1-i)\equiv(3\,.\,1)+2(3\,.\,2)+3(3\,.\,3)=l+2j+3m\qquad(\bmod 4$

Hierin is, alle congruenties betrekking hebbende op den modulus

$$m+2l+3j=3n+\tfrac{1}{4}(-2a-b+3),$$

$$l+2j+3m=3n+\tfrac{1}{4}(-b+6)\equiv -n+\tfrac{1}{4}(-b+6),$$

$$n=\frac{a^2+b^2-5}{8};$$

$\frac{a-3}{4}\cdot\frac{a+1}{4}$ even zijnde, is $\frac{(a-3)(a+1)}{8}$ door 4 deelbaar, evenzoo ook $\frac{(b-2)(b+2)}{8}$, dus heeft men

$$n\equiv\frac{a^2+b^2-5}{8}-\frac{(a-3)(a+1)}{8}-\frac{b^2-4}{8}=\tfrac{1}{4}(a+1),$$

zoodat er ten slotte komt

$$m+2l+3j\equiv\tfrac{1}{4}(a-b+11)\equiv(a-b-5),$$

$$l+2j+3m\equiv\tfrac{1}{4}(-a-b+5)$$

en hiermede

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right)=i^{\frac{a-b-5}{4}},\qquad\left(\left(\frac{1-i}{a+bi}\right)\right)=i^{\frac{-a-b+5}{4}}.$$

Het karakter van -1 gelijk twee zijnde, vindt men verder

$$\left(\left(\frac{-1-i}{a+bi}\right)\right)=i^{\frac{a-b+3}{4}},\qquad\left(\left(\frac{-1+i}{a+bi}\right)\right)=i^{\frac{-a-b-3}{4}}$$

en

$$\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)=i^{-\frac{b}{2}}.$$

Hiermede is het quadratisch karakter van $1+i$, als ook dat van $1-i$, $-1-i$, $-1+i$ ten opzichte van een primair priemgetal in elk geval bepaald. De uitkomsten stemmen geheel overeen met die door Gauss in art. 63 en 64 van de Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda gegeven, en daar in art. 68—76 op geheel verschillende wijze bewezen.

16. Met betrekking tot de analogie van een groot gedeelte der voorafgaande beschouwingen met die van Gauss in art. 8 e. v. van zijne eerste verhandeling over de theorie der vierde-machtsresten valt het volgende op te merken.

Gauss beschouwt reëele getallen, en de priemmodulus p is van den vorm $4n+1$, terwijl de beide gevallen $p=8n+1$, $p=8n+5$ onder-

norm μ in de gevallen II en III van art. 4.

De getallen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ worden nu bij Gauss in 4 klassen A, B, C, D verdeeld. De getallen dezer klassen door $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aanduidende, is deze klassificatie gegrond op de congruenties

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \\ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv f \\ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \\ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -f \end{array}\right\} \pmod{\mu = p},$$

waarin $f^2 \equiv -1 \pmod{p}$, en voor $\mu = a^2 + b^2$

$$a \equiv 1 \pmod{4}, \quad a + bf \equiv 0 \pmod{p}.$$

Voor $p = \mu = 8n + 1$ hebben a en b dezelfde beteekenis als in het bovenstaande, voor $p = 8n + 5$ verschillen a en b bij Gauss alleen in teeken met de waarden, die zij in het voorgaande hebben, waar $M = a + bi$ een primair complex priemgetal is

Laat men nu echter ook complexe getallen toe, dan is het duidelijk, dat de bovenstaande congruenties, die betrekking hebben op den modulus $p = \mu$, blijven gelden voor den modulus $a + bi$, zoodat ook $a + bf \equiv 0 \pmod{a + bi}$ is, waaruit blijkt $f \equiv i \pmod{a + bi}$, en dus

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1, \ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i, \ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1, \ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \pmod{a + bi}.$$

De klassificatie van Gauss valt derhalve samen met die volgens het biquadratisch karakter 0, 1, 2, 3 met betrekking tot den modulus $a + bi$.

Inderdaad, de reëele getallen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ vormen voor den modulus $a + bi$ een volledig systeem incongruente, niet door den modulus deelbare resten.

Vervangt men dan ook in de beide laatste voorbeelden van art. de complexe resten door de congruente reëele getallen, wat met behulp van $i = 27 \pmod{-3 - 8i}$ en $i = 11 \pmod{-5 + 6i}$ zonder moeite kan geschieden, dan verkrijgt men

A 1, 2, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72.
B 5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68
C 3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70
D 11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62

$$(\mathrm{mod} - 5 + 6i), \qquad \mu = 61,$$

A 1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58.
B 2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55.
C 3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60.
D 6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59.

volmaakt overeenkomende met de voorbeelden door Gauss gegeven in art. 11 der eerste verhandeling.

Alleen voor het geval I van art. 4, bestaat in de reëele theorie van Gauss niets analoogs, wat daarmede samenhangt, dat men in dit geval uit reëele getallen geen volledig restsysteem kan vormen.

De opmerking, dat de verdeeling in klassen A, B, C, D van Gauss in zijne eerste verhandeling identiek is met die volgens het biquadratisch karakter ten opzichte van den modulus $a + bi$, levert ook terstond het middel op, om al die theorema's te bewijzen, die door Gauss in zijne tweede verhandeling, art. 28, opgesteld zijn, en welke door inductie ontdekt werden, maar die tot nog toe, voor zoover ik zie niet werden bewezen.

Deze theorema's hebben betrekking op het voorkomen van een reëel priemgetal m in de vier klassen A, B, C, D, of na het voorgaande op het biquadratisch karakter van m ten opzichte van $a + bi$ als modulus.

17. Ik laat nu hier de door Gauss in art. 28 opgestelde opmerkingen volgen. De priemmodulus $p = \mu$ zij van den vorm $4n + 1$ volgens de opmerking van het vorige artikel is het nu te doen om de bepaling van de waarde van het symbool

$$\left(\left(\frac{m}{a + bi}\right)\right),$$

waarin m een reëel priemgetal is; de omstandigheid, dat voor $\mu = 8n +$
a en b bij G uss in teeken verschillen van de waarden in art. 14 heef

met zulk een teeken genomen worden, dat het steeds $\equiv 1 \pmod 4$ is dus negatief wanneer het positief genomen, van den vorm $4k+3=$ (s, terwijl een positief priemgetal van den vorm $4k+1$ door P za aangeduid worden. De opmerkingen van Gauss kunnen nu aldu uitgedrukt worden

I. Is $a \equiv 0 \pmod m$ dan is $\left(\left(\frac{m}{a+bi}\right)\right)=\pm 1$, en wel $+1$ wan neer m van den vorm $8r \pm 1$, daarentegen -1 wanneer m van den vorm $8r \pm 3$ is.

II. Is a niet door m deelbaar, dan hangt de waarde van he symbool af alléén van het volkomen bepaalde getal x, dat voldoet aan de congruentie

$$b \equiv ax \pmod m.$$

Voor $m = \mathrm{P}$ kan x hier de volgende waarden aannemen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mathrm{P}-1,$$

met uitzondering van de beide waarden f en $\mathrm{P}-f$, die voldoen aan $yy \equiv -1 \pmod{\mathrm{P}}$. Deze kunnen blijkbaar niet voorkomen, want ui $b \equiv ay$ zou volgen

$$b^2 \equiv -a^2 \text{ of } a^2+b^2=p\equiv 0 \pmod{\mathrm{P}},$$

d. w. z. p zou door P deelbaar zijn.

Voor $m=-\mathrm{Q}$ daarentegen kan x alle waarden

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mathrm{Q}-1$$

aannemen.

Deze waarden van x kunnen nu in 4 klassen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verdeel worden, zoodanig dat voor

$b \equiv a\alpha \pmod m$ de waarde van het symbool $=1$,
$b \equiv a\beta$ „ „ „ „ „ „ „ $=i$,
$b \equiv a\gamma$ „ „ „ „ „ „ „ $=-1$,
$b \equiv a\delta$ „ „ „ „ „ „ „ $=-i$

is, of wat op hetzelfde neerkomt, dat in deze gevallen m respec tievelijk tot de klassen A, B, C, D behoort.

Omtrent het aantal der getallen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geldt nu deze regel, da drie dezer aantallen gelijk zijn, terwijl dan het vierde aantal één kleine

A behoort, en dat der γ's, wanneer voor $a \equiv 0$ m tot C behoort.

De verdere opmerkingen van Gauss in art. 28 kunnen voor he oogenblik daargelaten worden, daar hun bewijs geen bezwaar onder vindt, zoodra eenmaal het bovenstaande aangetoond is, waartoe ik nu overga.

18. Zij dan vooreerst $m = -Q$, volgens de reciprociteitswet is dan

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

en voor $a \equiv 0 \pmod{Q}$

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{Q}\right)\right) = \left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{Q}\right)\right) = i^{\frac{Q^2-1}{4}},$$

want $\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1$; immers men heeft

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) \equiv b^{\frac{Q^2-1}{4}} \pmod{Q}$$

en daar Q van den vorm $4r+3$, en dus $\frac{Q^2-1}{4} = (Q-1)\,\frac{Q+1}{4}$ een veelvoud van $Q-1$ is, zoo volgt uit het theorema van Fermat

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right) = 1.$$

Voor $Q = 8n+3$ volgt nu

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = -1,$$

voor $Q = 8n+7$

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right) = +1.$$

Voor $m = P = (A+Bi)(A-Bi)$ daarentegen, waarin $A+Bi$ en $A-Bi$ de primaire factoren van P zijn, volgt uit de reciprociteitswet

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

en voor $a \equiv 0 \pmod{P}$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{bi}{A-Bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{-bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{+bi}{A-Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right).$$

$$\left(\left(\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{\alpha-\beta i}{A-Bi}\right)\right)=1,$$

dus

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right)=(-1)^{\frac{P-1}{4}},$$

of voor $P=8n+1$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=1$$

en voor $P=8n+5$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=-1.$$

Hiermede is dus het in het voorgaande art. onder I gezegde geheel bewezen.

19. Onderstellen wij dan nu, dat a niet door m deelbaar is, en beschouwen wij eerst het eenvoudigste geval

$$m=-Q,$$

dan is dus

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

en voor $b \equiv ax \pmod{Q}$

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a(1+xi)}{Q}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right),$$

daar $\left(\left(\frac{a}{Q}\right)\right)=1$ is, zooals reeds in het voorgaand artikel bewezen werd. Uit de verkregen uitkomst

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right)$$

blijkt nu reeds, dat de waarde van het symbool links, alleen van het getal x afhangt, welk getal de Q waarden

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1$$

kan aannemen.

Wij hebben dus nu nog slechts deze vraag te beantwoorden

hoeveel der getallen

$$1,\ 1+i,\ 1+2i,\ 1+3i,\ \ldots,\ 1+(Q-1)i$$

behooren er dan respectievelijk tot de klassen A, B, C, D?

Ik merk hiertoe vooreerst op, dat als een volledig systeem niet door Q deelbare resten de getallen

$$\alpha+\beta i$$

genomen kunnen worden, waarin α en β de waarden $0, 1, 2, 3, \ldots, Q-1$ doorloopen, met uitzondering der combinatie $\alpha=0$, $\beta=0$; en ten tweede, dat de getallen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q-1$$

alle tot A behooren, zoodat wanneer

$$\alpha'+\beta' i$$

tot eene zekere klasse behoort, ook

$$2(\alpha'+\beta' i),\ 3(\alpha'+\beta' i),\ \ldots,\ (q-1)(\alpha'+\beta' i)$$

tot diezelfde klasse behooren, alle welke getallen door het weglaten van veelvouden van q weder tot den vorm $\alpha+\beta i$, waarin α en β kleiner dan q zijn, teruggebracht kunnen worden. Nu zijn de resten van

$$\alpha',\ 2\alpha',\ 3\alpha',\ \ldots,\ (q-1)\alpha',$$

zoolang α' niet gelijk nul is, volgens den modulus q in zekere volgorde met de getallen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ q-1$$

congruent.

In de groep der $q-1$ getallen

$$\alpha'+\beta' i,\ 2(\alpha'+\beta' i),\ \ldots,\ (q-1)(\alpha'+\beta' i),$$

die alle tot dezelfde klasse behooren, komt er dus één voor, congruent met een der getallen

$$1+xi \qquad (x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q-1).$$

Nu is het aantal getallen van elke klasse

$$\frac{q^2-1}{4}=(q-1)\times\frac{q+1}{4},$$

een veelvoud van $q-1$, en de $q-1$ getallen zonder reëel gedeelte

$$i,\ 2i,\ 3i,\ \ldots,\ (q-1)i$$

behooren voor $q=8n+7$ tot A, voor $q=8n+3$ tot C.

Daar men nu alle getallen van elke klasse, waarvan het reëel ge-
deelte niet gelijk nul is, op bovenstaande wijze in groepen van $q -$
getallen kan vereenigen, zoodanig dat er in elke groep één geta
met het reëele gedeelte 1 voorkomt, zoo volgt, dat voor $Q = 8n +$
er in de klassen A, B, C, D respectievelijk

$$\frac{q-3}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}$$

getallen $1 + xi$ voorkomen.

Voor $Q = 8n + 3$ zijn deze aantallen

$$\frac{q+1}{4}, \quad \frac{q+1}{4}, \quad \frac{q-3}{4}, \quad \frac{q+1}{4},$$

terwijl volgens art. 18 in het geval $a \equiv 0 \pmod{Q}$ voor $Q = 8n +$
of $Q = 8n + 3$, Q respectievelijk tot de klassen A en C behoorde.

Alles wat op het geval $m = -Q$ betrekking had, is dus hiermed
afgehandeld.

20. Voor $m = P = (A + Bi)(A - Bi)$ vonden wij reeds

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

en dus wanneer

$$b \equiv ax \pmod{P},$$

heeft men

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{a}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{a}{A-Bi}\right)\right)$$

of daar, volgens een reeds in art. 18 gemaakte opmerking, het pro-
duct der beide laatste factoren rechts gelijk 1 is,

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right) = \left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right),$$

waaruit reeds blijkt, dat de waarde van het symbool links alleen va
het getal x afhangt, zoodat nog slechts de volgende vraag te beant
woorden blijft: voor hoeveel waarden van $1 + xi$ neemt

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

ncongruente niet door den modulus $A+Bi$ deelbare resten, e
oreng deze volgens hun biquadratisch karakter tot 4 groepen A, B
C, D. Hierbij denk ik mij elke rest zoo gekozen, dat het reëele dee
gelijk 1, en de factor van i kleiner dan P is.

Men kan dit aldus voorstellen:

$$
\begin{array}{ll}
(\text{mod } A+Bi), & A^2+B^2=P. \\
\text{Klasse A} & \alpha=1+ai \\
\phantom{\text{Klasse }}\text{B} & \beta=1+bi \\
\phantom{\text{Klasse }}\text{C} & \gamma=1+ci \\
\phantom{\text{Klasse }}\text{D} & \delta=1+di.
\end{array}
$$

De getallen a, b, c, d in hun geheel stemmen overeen met

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (P-1),$$

behalve dat de waarde f, die congruent i is ontbreekt, want $1+fi \equiv$
mod $A+Bi$).

Evenzoo met $A-Bi$ handelende, ziet men gemakkelijk, dat d
klassificatie deze zal zijn:

$$
\begin{array}{ll}
(\text{mod } A-Bi), & A^2+B^2=P. \\
\text{Klasse A} & 1+(P-a)i \\
\phantom{\text{Klasse }}\text{B} & 1+(P-d)i \\
\phantom{\text{Klasse }}\text{C} & 1+(P-c)i \\
\phantom{\text{Klasse }}\text{D} & 1+(P-b)i
\end{array}
$$

want gelijktijdig heeft men

$$(1+xi)^{\frac{P-1}{4}}-i^{\rho}=(A+Bi)(C+Di),$$

$$(1-xi)^{\frac{P-1}{4}}-i^{3\rho}=(A-Bi)(C-Di).$$

Heeft dus $1+xi$ volgens den modulus $A+Bi$ het karakter ϱ
dan heeft $1-xi\equiv 1+(P-x)i$ volgens den modulus $A-Bi$ he
karakter 3ϱ.

21. Zal nu

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

$$\left(\left(\frac{1+x\,i}{A+B\,i}\right)\right)$$

een der waarden 1, i, -1, $-i$ heeft, tegelijkertijd

$$\left(\left(\frac{1+x\,i}{A-B\,i}\right)\right)$$

een der waarden 1, $-i$, -1, i aannemen, of op de beide verdee-
lingen in klassen lettende: wanneer x respectievelijk tot a, b, c,
behoort, dan moet tegelijkertijd ook $p-x$ tot de getallen a, b, c,
behooren. Men kan dus zeggen, dat het aantal der waarden van
waarvoor

$$\left(\left(\frac{1+x\,i}{A+B\,i}\right)\right)\;\left(\left(\frac{1+x\,i}{A-B\,i}\right)\right)=1$$

wordt, gelijk is aan de som van de aantallen oplossingen der con-
gruenties

$$\begin{aligned} a+a' &\equiv 0,\\ b+b' &\equiv 0,\\ c+c' &\equiv 0,\\ d+d' &\equiv 0, \end{aligned}$$

ten opzichte van den modulus P, of wat op hetzelfde neerkomt, ten
opzichte van den modulus $A+B\,i$.

Men bedenke hierbij, dat wel de voor x uitgesloten waarde $p-$
onder a, b, c, d voorkomt, maar dat deze waarde toch in geen de
bovenstaande congruenties kan optreden, omdat dit zoude vereischen
dat ook f voorkwam onder de getallen a, b, c, d, wat niet het geval is.

Nu is $\alpha=1+a\,i$, zoodat de voorgaande congruenties na verme-
nigvuldiging met i, overgaan in

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\alpha' &\equiv 2\\ \beta+\beta' &\equiv 2\\ \gamma+\gamma' &\equiv 2\\ \delta+\delta' &\equiv 2. \end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod}\ A+B\,i).$$

Behoort $\frac{p-1}{2}$ tot de klasse A, dan gaan de voorgaande congru-
enties door vermenigvuldiging met $\frac{p-1}{2}$ over in

$$\begin{aligned} \beta + \beta' + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \delta' + 1 &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{mod } \mathrm{A} + \mathrm{B}\, i),$$

zoodat de som van het aantal oplossingen dezer congruenties gelijk is aan het aantal waarden van x, die

$$\left(\left(\frac{1 + x\, i}{\mathrm{A} + \mathrm{B}\, i}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1 + x\, i}{\mathrm{A} - \mathrm{B}\, i}\right)\right)$$

gelijk 1 maken.

Maar zooals men zich onmiddellijk overtuigt, blijft dit resultaat hetzelfde, ook wanneer $\frac{p-1}{2}$ tot de klassen B, C, D behoort. Behoort bijv. $\frac{p-1}{2}$ tot B, dan volgt uit $\alpha + \alpha' \equiv 2$ door vermenigvuldiging met $\frac{p-1}{2}$

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0,$$

en uit $\beta + \beta' \equiv \gamma + \gamma' \equiv \delta + \delta' \equiv 2$ respectievelijk

$$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0, \quad \delta + \delta' + 1 \equiv 0, \quad \alpha + \alpha' + 1 \equiv 0.$$

Noemt men de aantallen der waarden van x, die respectievelijk $\left(\left(\frac{1 + x\, i}{\mathrm{A} + \mathrm{B}\, i}\right)\right) \left(\left(\frac{1 + x\, i}{\mathrm{A} - \mathrm{B}\, i}\right)\right)$ gelijk 1, i, -1, $-i$ maken, t, u, v, w, dan is dus t de som van de aantallen oplossingen der congruenties

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \beta' + 1 &\equiv 0 \\ \gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0 \\ \delta + \delta' + 1 &\equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{mod } \mathrm{A} + \mathrm{B}\, i).$$

Geheel op dezelfde wijze vindt men, dat u de som is van de aantallen oplossingen der congruenties

$$\begin{aligned} \alpha + \delta + 1 &\equiv 0, \\ \beta + \alpha + 1 &\equiv 0, \\ \gamma + \beta + 1 &\equiv 0, \\ \delta + \gamma + 1 &\equiv 0, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \alpha+\gamma+1\equiv 0, & & \alpha+\beta+1\equiv 0, \\ \beta+\delta+1\equiv 0, & \text{en} & \beta+\gamma+1\equiv 0, \\ \gamma+\alpha+1\equiv 0, & & \gamma+\delta+1\equiv 0, \\ \delta+\beta+1\equiv 0, & & \delta+\alpha+1\equiv 0, \end{array}$$

te beschouwen heeft.

Is dus $P=8n+1$, dan heeft men volgens art. 7 en 8

$$\begin{aligned} t &= (0.0)+(1.1)+(2.2)+(3.3)=h+l+k+j=2n-1, \\ u &= (0.3)+(1.0)+(2.1)+(3.2)=l+j+m+m=2n, \\ v &= (0.2)+(1.3)+(2.0)+(3.1)=k+m+k+m=2n, \\ w &= (0.1)+(1.2)+(2.3)+(3.0)=j+m+m+l=2n, \end{aligned}$$

en voor $P=8n+5$ volgens art. 13

$$\begin{aligned} t &= (0.2)+(1.3)+(2.0)+(3.1)=k+j+h+l=2n+1, \\ u &= (0.1)+(1.2)+(2.3)+(3.0)=j+l+m+m=2n+1, \\ v &= (0.0)+(1.1)+(2.2)+(3.3)=h+m+h+m=2n, \\ w &= (0.3)+(1.0)+(2.1)+(3.2)=l+m+m+j=2n+1. \end{aligned}$$

22. Al het voorgaande samenstellende, hebben dus de kenmer om te onderscheiden of een reëel priemgetal tot de klassen A, B, behoort, wanneer de modulus p van den vorm $4n+1$ en $a+bi$ primaire complexe priemfactor van p is, de volgende gedaante:

Het priemgetal $P=8n+1$ behoort tot

A voor $a\equiv 0$, $b\equiv a\,\alpha$		Aantal der	α's $=2n-1$,
B voor $b\equiv a\,\beta$	(mod P).	„ „	β's $=2n$,
C voor $b\equiv a\,\gamma$		„ „	γ's $=2n$,
D voor $b\equiv a\,\delta$		„ „	δ's $=2n$.

Het priemgetal $P=8n+5$ behoort tot

A voor $b\equiv a\,\alpha$		Aantal der	α's $=2n+1$,
B voor $b\equiv a\,\beta$	(mod P).	„ „	β's $=2n+1$,
C voor $b\equiv a\,\gamma$, $a\equiv 0$		„ „	γ's $=2n$,
D voor $b\equiv a\,\delta$		„ „	δ's $=2n+1$.

Het priemgetal $-Q=-(8n+3)$ behoort tot

A voor $b\equiv a\,\alpha$		Aantal der	α's $=2n+1$,
B voor $b\equiv a\,\beta$	(mod Q).	„ „	β's $=2n+1$,
C voor $b\equiv a\,\gamma$, $a\equiv 0$		„ „	γ's $=2n$,
D voor $b\equiv a\,\delta$			δ's $=2n+1$.

Het priemgetal $-Q = -(8n+7)$ behoort tot

$$\begin{array}{lll} \text{A voor } b \equiv a\,\alpha,\ a \equiv 0 & & \text{Aantal der } \alpha\text{'s} = 2n+1, \\ \text{B voor } b \equiv a\,\beta & (\text{mod Q}). & \text{,, \quad ,, } \beta\text{'s} = 2n+2, \\ \text{C voor } b \equiv a\,\gamma & & \text{,, \quad ,, } \gamma\text{'s} = 2n+2, \\ \text{D voor } b \equiv a\,\delta & & \text{,, \quad ,, } \delta\text{'s} = 2n+2. \end{array}$$

Ik voeg hierbij nog de volgende opmerkingen van Gauss (art. 28) waarvan het bewijs na al het voorgaande niet het minste bezwaar oplevert.

1. Het getal 0 behoort altijd tot de α's, en de getallen $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ behooren (mod m) respectievelijk tot de α's, δ's, γ's en β's.

2. Voor $P = 8n+1$, $Q = 8n+7$ behooren de waarden van $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$ (mod m) respectievelijk tot de α's, δ's, γ's, β's; en voor $P = 8n+5$, $Q = 8n+3$ behooren deze waarden respectievelijk tot de γ's, β's, α's, δ's.

DERDE-MACHTSRESTEN.

23. Nu tot de derde-machtsresten overgaande, is het noodig het een en ander omtrent de theorie der geheele getallen van den vorm $a + b\varrho$ in herinnering te brengen; ϱ is hierin een complexe derde machtswortel der eenheid, dus $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$.

Zooals dan bekend is, gelden ook in deze theorie omtrent de deelbaarheid der getallen, hunne ontbinding in priemfactoren, het bestaan van primitieve wortels der priemgetallen enz. geheel analoge theorema's als die in de gewone theorie der reëele getallen, en verreweg het grootste gedeelte der onderzoekingen in de vier eerste sectiën der Disquisitiones arithmeticae kunnen bijna onveranderd ook voor de theorie der geheele getallen $a + b\varrho$ doorgevoerd worden.

Het product van twee geconjugeerde getallen $a + b\varrho$ en $a + b\varrho^2$

$$(a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^2 - ab + b^2$$

heet de norm van het getal $a + b\varrho$ en zal steeds door μ aangeduid worden.

Het getal 3 is in deze theorie geen priemgetal, want

$$3 = (1-\varrho)(1-\varrho^2) = -\varrho^2(1-\varrho)^2$$

ten eerste de reëele priemgetallen van den vorm $3n-1$, de norm is dan gelijk $(3n-1)^2$;

ten tweede de complexe priemfactoren van de reëele priemgetallen van den vorm $3n+1$. Dit reëele priemgetal is dan te gelijk de norm van den complexen priemfactor.

Bijv. is

$$7=(2+3\varrho)(2+3\varrho^2)=(2+3\varrho)(-1-3\varrho).$$

De priemgetallen $2+3\varrho$, $-1-3\varrho$ hebben beide 7 tot norm.

In beide gevallen is dus de norm van den vorm $3k+1$.

Verder is het voldoende alleen primaire priemgetallen te beschouwen, waarbij ik mij van dit woord in den zin van Eisenstein (Crelle's Journal, 27, p. 301) zal bedienen, zoodat $a+b\varrho$ primair heet, wanneer $a+1$ en b beide door 3 deelbaar zijn. De reëele priemgetallen van den vorm $3n-1$ moeten dus positief genomen worden om primair te zijn.

Zij dan M een primair priemgetal, μ de norm van den vorm $3n+1$. Een volledig stelsel incongruente, niet door den modulus M deelbare resten bevat dan $\mu-1=3n$ getallen. Deze getallen kunnen tot 3 klassen, elk μ getallen bevattende, gebracht worden al naar dat hunne $\left(\frac{\mu-1}{3}\right)^{\text{de}}$ macht (mod M) congruent is met 1, ϱ of ϱ^2. Deze verdeeling kan aldus voorgesteld worden:

$$\begin{array}{llll} \mathrm{A} & \alpha, & \alpha', & \alpha'', \ldots \\ \mathrm{B} & \beta, & \beta', & \beta'', \ldots \\ \mathrm{C} & \gamma, & \gamma', & \gamma'', \ldots \end{array}$$

waarin dus

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}}\equiv 1, \qquad \beta^{\frac{\mu-1}{3}}\equiv\varrho, \qquad \gamma^{\frac{\mu-1}{3}}\equiv\varrho^2 \pmod{\mathrm{M}}.$$

Het cubisch karakter der getallen α, α', α'', ... is 0, dat der getallen β, β', ... is 1, dat der getallen γ, γ', ... is 2.

Het zal intusschen ook gemakkelijk zijn, van het symbool van Eisenstein gebruik te maken, en dus te schrijven

$$\left[\frac{\alpha}{\mathrm{M}}\right]=1, \quad \left[\frac{\beta}{\mathrm{M}}\right]=\varrho, \quad \left[\frac{\gamma}{\mathrm{M}}\right]=\varrho^2.$$

Het doel van de eerstvolgende beschouwingen is nu de bepaling van het cubisch karakter van $1-\varrho$, of wel de bepaling van de waarde van het symbool $\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]$.

24. Door bij alle getallen van A, B, C de eenheid op te tellen, ontstaan de 3 groepen van getallen A′, B′, C′

$$\begin{array}{llll} A' & \alpha+1, & \alpha'+1, & \alpha''+1, \dots \\ B' & \beta+1, & \beta'+1, & \beta''+1, \dots \\ C' & \gamma+1, & \gamma'+1, & \gamma''+1, \dots \end{array}$$

en ik noem nu (0.0), (0.1), (0.2) de aantallen getallen van A′, die respectievelijk congruent zijn met getallen van A, B, C; (1.0), (1.1), (1.2) de aantallen getallen van B′, die respectievelijk congruent zijn met getallen van A, B, C; eindelijk (2.0), (2.1), (2.2) de aantallen getallen van C′, die respectievelijk congruent zijn met getallen van A, B, C.

Al deze getallen kunnen in het schema S vereenigd worden

$$\begin{array}{ccc} (0.0) & (0.1) & (0.2) \\ (1.0) & (1.1) & (1.2) \\ (2.0) & (2.1) & (2.2) \end{array}$$

en met de bepaling van deze getallen is ook onmiddellijk het cubisch karakter van $1-\varrho$ gevonden. Want uit de blijkbaar identieke congruenties

$$\left.\begin{array}{l} (x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\dots \equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-1 \\ (x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\dots \equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho \\ (x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\dots \equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho^2 \end{array}\right\} \pmod{M}$$

volgt voor $x=-1$, daar $\frac{\mu-1}{3}$ even is (behalve voor $M=2$, welk geval uit te zonderen is),

$$\left.\begin{array}{l} (\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\dots \equiv 1-\varrho \\ (\gamma+1)(\gamma'+1)(\gamma''+1)\dots \equiv 1-\varrho^2 \end{array}\right\} \pmod{M},$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]=\varrho^{(1.1)+2(1.2)},$$

$$\left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right]=\varrho^{(2.1)+2(2.2)}.$$

25. Het getal -1 behoort, als volkomen derde-macht tot de klasse A, en de getallen α en $-\alpha$, β en $-\beta$, γ en $-\gamma$ komen tegelijkertijd in de klassen A, B, C voor.

Met behulp van deze opmerking overtuigt men zich nu dadelijk, dat

het teeken	voorstelt het aantal oplossingen van
(0.0)	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$
(0.1)	$\alpha+\beta+1\equiv 0$
(0.2)	$\alpha+\gamma+1\equiv 0$
(1.0)	$\beta+\alpha+1\equiv 0$
(1.1)	$\beta+\beta'+1\equiv 0 \pmod{M}$,
(1.2)	$\beta+\gamma+1\equiv 0$
(2.0)	$\gamma+\alpha+1\equiv 0$
(2.1)	$\gamma+\beta+1\equiv 0$
(2.2)	$\gamma+\gamma'+1\equiv 0$

zoodat men heeft

$$(0.1)=(1.0),\quad (0.2)=(2.0),\quad (1\,2)=(2.1).$$

Is $xy\equiv 1 \pmod{M}$ en behoort x tot A, dan behoort blijkbaar ook y tot A, behoort echter x tot B of C, dan behoort y respectievelijk tot C of B, wat men kan uitdrukken door te schrijven

$$\alpha\,\alpha'\equiv 1,\quad \beta\,\gamma\equiv 1 \pmod{M}.$$

Uit

$$\gamma\,(\alpha+\beta+1)\equiv\gamma'+1+\gamma,$$
$$\beta\,(\alpha+\gamma+1)\equiv\beta'+1+\beta,$$

besluit men nu tot deze betrekkingen

$$(0.1)=(2.2),\quad (0.2)=(1.1),$$

zoodat het schema S dezen vorm heeft

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j. \end{matrix}$$

Daar -1 tot A, dus 0 tot A′ behoort, maar behalve dit getal van A′ overigens alle getallen van A′, B′, C′ elk met één getal van A, B of C congruent zijn, zoo volgt verder

$$h+j+k=n-1,$$

De beschouwing van het aantal oplossingen der congruentie

$$\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0 \pmod{M},$$

waarin α, β, γ respectievelijk uit de klassen A, B, C te kiezen zijn levert eindelijk nog eene betrekking tusschen h, j, k, l. Neemt men namelijk eerst voor α de getallen van A, dan verkrijgt men voor dit aantal

$$hl+jj+kk.$$

Neemt men daarentegen achtereenvolgens voor β alle getallen van B, dan vindt men voor ditzelfde aantal

$$jk+kl+lj$$

dus is

$$0=hl+jj+kk-jk-kl-lj.$$

26. Elimineert men uit deze laatste vergelijking h met behulp van $h=l-1$, dan is

$$0=l(l-1)+jj+kk-jk-kl-lj,$$

welke vergelijking met 4 vermenigvuldigd, wegens

$$(j+k)^2+3(j-k)^2=4(jj+kk-jk)$$

den vorm aanneemt

$$0=4l^2-4l+(j+k)^2+3(j-k)^2-4l(k+j).$$

Daar $l=n-(j+k)$ is, heeft men door met 9 te vermenigvuldigen

$$36n=36l^2+9(j+k)^2+27(j-k)^2-36l(j+k)+36(j+k);$$

tegelijk is

$$24n=24(j+k+l),$$

dus vindt men door aftrekking

$$12n=36l^2+9(j+k)^2+27(j-k)^2-36l(j+k)+12(j+k)-24l,$$

of wel

$$12n+4=4\mu=(6l-3j-3k-2)^2+27(j-k)^2.$$

Stellen wij nu

aldus uitdrukken

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + A - 7, \\ 18j &= 6n - A + 3B - 2, \\ 18k &= 6n - A - 3B - 2, \\ 9l &= 3n + A + 2. \end{aligned}$$

Om nog A en B te bepalen zijn nu twee gevallen te onderscheiden

27. Is vooreerst M reëel van den vorm $3n-1$, dus $\mu = M^2$, dan volgt uit

$$4\mu = 4M^2 = A^2 + 3B^2,$$

dat $A = \pm 2M$, $B = 0$ is. Want was B niet gelijk nul, dan zou men een geheel getal x kunnen bepalen, zóó dat

$$A \equiv Bx \pmod{M},$$

waaruit volgt

$$A^2 \equiv -3B^2 \equiv B^2 x^2 \pmod{M}$$

dus

$$x^2 \equiv -3 \pmod{M},$$

wat onmogelijk is, daar men weet, dat -3 niet-rest is van M.

Stellig is dus $B = 0$, $A = \pm 2M$. Maar ook het teeken van A volgt onmiddellijk uit de opmerking, dat $A \equiv 1 \pmod{3}$, en M als primair priemgetal $\equiv -1 \pmod{3}$ is; waaruit dus blijkt

$$A = 2M$$

en ten slotte

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2M - 7, \\ 9j = 9k &= 3n - M - 1, \\ 9l &= 3n + 2M + 2. \end{aligned}$$

28. Is in de tweede plaats $M = a + b\varrho$ een primaire complexe priemfactor van een reëel priemgetal p van den vorm $3n+1$, dan is

$$4\mu = (2a - b)^2 + 3b^2 = A^2 + 3B^2$$

en daar $a + b\varrho$ primair is, $a + 1 \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$.

Nu is ook B door 3 deelbaar en daar, zooals gemakkelijk te bewijzen valt, 4μ slechts op één wijze voorgesteld kan worden als de som van een quadraat en het 27-voud van een tweede quadraat, zoo volgt

$$A = 2a - b, \quad B = \pm b.$$

Het teeken van A wordt namelijk weder bepaald door $A \equiv 1$ (mod 3

Om nog het teeken van B te bepalen, dient de volgende beschouwing; doorloopt z alle getallen van A, B en C, dan vindt men op geheel dezelfde wijze als in art. 12,

$$\Sigma (z^3 + 1)^{\frac{\mu - 1}{3}} \equiv -2 \equiv 3(h + j\varrho + k\varrho^2) \quad (\text{mod } M),$$

of

$$-2 \equiv 3[(h-k) + \varrho(j-k)]$$

en nu h, j, k door A en B uitdrukkende, en voor A de waarde $2a - b$ schrijvende, verkrijgt men na eene kleine herleiding

$$0 \equiv 2a - b + B + 2B\varrho \quad (\text{mod } M = a + b\varrho),$$

waaruit blijkt, dat $B = b$ is

Nadat op deze wijze A en B gevonden zijn, heeft men

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2a - b - 7, \\ 9j &= 3n - a + 2b - 1, \\ 9k &= 3n - a - b - 1, \\ 9l &= 3n + 2a - b + 2. \end{aligned}$$

29. Volgens art. 24 is nu het cubisch karakter van $1 - \varrho$ volgens den modulus 3 congruent met

$$(1.1) + 2(1.2) \equiv k - l,$$

dat van $1 - \varrho^2$ congruent met

$$(2.1) + 2(2.2) \equiv l - j,$$

dus wanneer M reëel van den vorm $3n - 1$ is, heeft men volgens art. 27

$$\text{Karakter } (1 - \varrho) \equiv -\frac{M+1}{3},$$

$$\text{Karakter } (1 - \varrho^2) \equiv +\frac{M+1}{3},$$

of wel

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{-\frac{M+1}{3}}, \quad \left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{+\frac{M+1}{3}},$$

waaruit nog volgt

is daarentegen $M = a + b\varrho$ een primaire complexe factor van een reëel priemgetal van den vorm $3n+1$, dan is volgens de waarden in art. 28 gevonden

$$\text{Karakter } (1-\varrho) \equiv -\frac{a+1}{3},$$

$$\text{Karakter } (1-\varrho^2) \equiv \frac{a-b+1}{3},$$

of

$$\left[\frac{1-\varrho}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{a+1}{3}}, \quad \left[\frac{1-\varrho^2}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{a-b+1}{3}}, \quad \left[\frac{3}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{b}{3}}.$$

Deze resultaten verschillen niet wezenlijk van die door Eisenstein gegeven in het 28ste deel van Crelle's Journal, p. 28 e. v.

30. Omtrent het geval, dat het priemgetal M een factor is van een reëel priemgetal p van den vorm $3n+1$, moge nog het volgende opgemerkt worden.

Daar in $M = a + b\varrho$, a en b geen gemeenen deeler hebben en derhalve ook b en $a-b$ relatief priem zijn, zoo kan men altijd twee geheele getallen α en β vinden, zoodanig dat

$$b\,\alpha + (a-b)\,\beta = 1$$

wordt, en dan is

$$(a+b\varrho)(\alpha+\beta\varrho) = a\alpha - b\beta + \varrho,$$

dus

$$\varrho \equiv b\beta - a\alpha \pmod{M = a + b\varrho}.$$

Hieruit volgt onmiddellijk, dat elk geheel getal $c + d\varrho$ volgens den modulus $a + b\varrho$ congruent is met een reëel getal, welk reëel getal kleiner dan de modulus $\mu = p$ aangenomen kan worden, zoodat de reëele getallen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mu-1$$

een volledig restsysteem vormen. Verdeelt men nu deze reëele getallen (met uitzondering van 0) volgens hun cubisch karakter in drie klassen

A	$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \ldots$
B	$\beta,\ \beta',\ \beta'',\ \ldots$

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}}-1\equiv\beta^{\frac{\mu-1}{3}}-f\equiv\gamma^{\frac{\mu-1}{3}}-f^2\equiv 0 \pmod{M=a+b\varrho},$$

en daar

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}}-1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{3}}-f,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{3}}-f^2$$

reëele getallen zijn, zoo moeten zij niet alleen door $a+b\varrho$ maar ook door den modulus

$$p=\mu=(a+b\varrho)(a+b\varrho^2)$$

deelbaar zijn, of

$$\left.\begin{aligned}\alpha^{\frac{\mu-1}{3}}&\equiv 1\\ \beta^{\frac{\mu-1}{3}}&\equiv f\\ \gamma^{\frac{\mu-1}{3}}&\equiv f^2\end{aligned}\right\} \pmod{p=\mu}.$$

Hieruit blijkt dus, dat de klassificatie der getallen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1$$

met behulp dezer drie laatste congruenties, samenvalt met die volgens hun cubisch karakter ten opzichte van den modulus $a+b\varrho$.

Het resultaat

$$\left[\frac{3}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

kan nu aldus uitgesproken worden: het getal 3 behoort tot de klasse A, B of C, al naar dat $-\frac{1}{3}b$ van den vorm $3m$, $3m+1$ of $3m+2$ is.

Ik laat hier eenige voorbeelden volgen.

$p=7,\quad a=2,\quad b=3,\quad f=4.$ Schema S

A	1,	6.	h	j	k	0	1
B	2,	5.	j	k	l	1	0
C	3,	4.	k	l	j	0	1

$p=13,\quad a=-1,\quad b=3,\quad f=9.$

A	1,	5,	8,	12.	0	2
B	4,	6,	7,	9.	2	1
C	2,	3,	10,	11.	1	1

A	1,	7,	8,	11,	12,	18.	2 2
B	4,	6,	9,	10,	13,	15.	2 1
C	2,	3,	5,	14,	16,	17.	1 3

$p=31,\quad a=5,\quad b=6,\quad f=25.$

A	1,	2,	4,	8,	15,	16,	23,	27,	29,	30.	3 4
B	3,	6,	7,	12,	14,	17,	19,	24,	25,	28.	4 2
C	5,	9,	10,	11,	13,	18,	20,	21,	22,	26.	2 4

$p=37,\quad a=-4,\quad b=3,\quad f=26.$

A	1,	6,	8,	10,	11,	14,	23,	26,	27,	29,	31,	36.	2 5
B	2,	9,	12,	15,	16,	17,	20,	21,	22,	25,	28,	35.	5 4
C	3,	4,	5,	7,	13,	18,	19,	24,	30,	32,	33,	34.	4 3

$p=43,\quad a=-1,\quad b=6,\quad f=36.$

A	1,	2,	4,	8,	11,	16,	21,	22,	27,	32,	35,	39,	41,	42.	3 6
B	3,	5,	6,	10,	12,	19,	20,	23,	24,	31,	33,	37,	38,	40.	6 4
C	7,	9,	13,	14,	15,	17,	18,	25,	26,	28,	29,	30,	34,	36.	4 4

$p=61,\quad a=5,\quad b=9,\quad f=13.$

A	1,	3,	8,	9,	11,	20,	23,	24,	27,	28,	33,	34,	37,	6 8
							38,	41,	50,	52,	53,	58,	60.	8 5
B	4,	10,	12,	14,	17,	19,	25,	26,	29,	30,	31,	32,	35,	5 7
							36,	42,	44,	47,	49,	51,	57.	
C	2,	5,	6,	7,	13,	15,	16,	18,	21,	22,	39,	40,	43,	
							45,	46,	48,	54,	55,	56,	59.	

Terwijl over het voorkomen van het getal 3 in de groepen A, B, op bovenstaande wijze vooruit beslist is, kan men nu, met behul van de reciprociteitswet, in de theorie der cubische resten gemak kelijk de kenmerken opstellen, noodig om het voorkomen ook va andere getallen in deze klassen te onderkennen. Het is hierb blijkbaar voldoende om alleen priemgetallen te beschouwen.

Wat het priemgetal 2 betreft, kan men deze criteria, zonder hul der reciprociteitswet, aldus afleiden.

31. Daar het getal $p-1$ altijd tot A behoort, zoo volgt onmid dellijk, dat 2 tot de klasse A, B of C zal behooren al naar gelan $\frac{p-1}{2}$ tot de klasse A, C of B behoort.

der congruenties

$$\begin{aligned}\alpha+\alpha'+1&\equiv 0\\ \beta+\beta'+1&\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, p),\\ \gamma+\gamma'+1&\equiv 0\end{aligned}$$

en daar men α met α', β met β', γ met γ' mag verwisselen, zijn deze drie aantallen even, uitgezonderd het eerste, wanneer $\alpha=\alpha'=\frac{p-1}{2}$ tot A behoort, of uitgezonderd het tweede, wanneer $\beta=\beta'=\frac{p-1}{2}$ tot B behoort, of uitgezonderd het derde, wanneer $\gamma=\gamma'=\frac{p-1}{2}$ tot C behoort.

Hieruit blijkt dus, dat 2 tot de klasse A, B of C behoort, al naar dat an de drie getallen h, j, k het eerste, tweede of derde oneven is.

Daar $p=3n+1$ (n even) en volgens art. 28

$$\begin{aligned}9h&=3n+2a-b-7,\\ 9j&=3n-a+2b-1,\\ 9k&=3n-a-b-1\end{aligned}$$

is, zoo is h oneven, wanneer b even is, j oneven, wanneer a even is eindelijk k oneven, wanneer a en b beide oneven zijn. Daar a en b geen gemeenen deeler hebben, zoo zijn geen andere gevallen mogelijk, dus 2 behoort tot

$$\begin{aligned}&\text{A, wanneer } b\equiv 0\\ &\text{B,} \quad\;\; \text{„} \quad\; a\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2).\\ &\text{C,} \quad\;\; \text{„} \quad\; a\equiv b\equiv 1\end{aligned}$$

32. Wat het voorkomen van 5 betreft, volgens de cubische reciprociteitswet is

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{5}\right],$$

want 5 is ook in de theorie der geheele getallen $a+b\varrho$ een priemgetal.

Voor $a\equiv 0$ (mod 5) is dus

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{b\,\varrho}{5}\right]=\left[\frac{\varrho}{5}\right]=\varrho^{8}=\varrho^{2};$$

derhalve behoort 5 tot C.

Is a niet door 5 deelbaar, dan kan men x bepalen uit

$$b \equiv a x \pmod 5,$$

en x kan de waarden 0, 1, 2, 3, 4 aannemen; men heeft alzo

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a(1+x\varrho)}{5}\right] = \left[\frac{1+x\varrho}{5}\right]$$

en men vindt voor

$$\begin{array}{ll} x=0 & \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=1, \\ x=1 & \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho, \\ x=2 & \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=1, \\ x=3 & \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2, \\ x=4 & \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho. \end{array}$$

Hieruit volgt, dat 5 behoort tot

$$\begin{array}{llll} \text{A, wanneer} & b\equiv 0, & b\equiv 2a & \\ \text{B,} \quad " & b\equiv a, & b\equiv 4a & \pmod 5. \\ \text{C,} \quad " & b\equiv 3a, & a\equiv 0. & \end{array}$$

Om het voorkomen van 7 te beoordeelen, heeft men

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{2+3\varrho}{a+b\varrho}\right] \left[\frac{2+3\varrho^2}{a+b\varrho}\right]$$

en nu volgens de reciprociteitswet

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho}\right] \left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho^2}\right].$$

Voor $a \equiv 0 \pmod 7$ volgt, daar in 't algemeen

$$\left[\frac{\alpha+\beta\varrho}{a+b\varrho}\right] \left[\frac{\alpha+\beta\varrho^2}{a+b\varrho^2}\right] = 1$$

is,

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right] = \left[\frac{\varrho}{2+3\varrho}\right] \left[\frac{\varrho}{2+3\varrho^2}\right] = \left[\frac{\varrho^2}{2+3\varrho^2}\right] = \varrho^4 = \varrho,$$

zoodat 7 tot B behoort.

Is a niet door 7 deelbaar, maar

dan volgt

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho^2}\right],$$

en voor x kunnen de waarden

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6$$

voorkomen, niet $x=3$ en $x=5$, daar deze waarden

$$p=a^2-ab+b^2\equiv a^2(1-x+x^2)$$

door 7 deelbaar zouden maken.

Men vindt nu voor

$$\begin{array}{ll} x=0 & \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=1, \\ x=1 & \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2, \\ x=2 & \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=1, \\ x=4 & \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho, \\ x=6 & \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2, \end{array}$$

zoodat 7 behoort tot

$$\begin{array}{llll} \text{A, wanneer} & b\equiv 0, & b\equiv 2a & \\ \text{B,}\quad " & b\equiv 4a, & a\equiv 0 & (\text{mod } 7). \\ \text{C,}\quad " & b\equiv a, & b\equiv 6a & \end{array}$$

Op gelijke wijze, of door inductie, zal men vinden dat

11 behoort tot

$$\begin{array}{llllll} \text{A voor} & b\equiv 0, & b\equiv 2a, & b\equiv 4a, & b\equiv 5a & \\ \text{B}\quad " & b\equiv 3a, & b\equiv 6a, & b\equiv 9a, & a\equiv 0 & (\text{mod } 11), \\ \text{C}\quad " & b\equiv a, & b\equiv 7a, & b\equiv 8a, & b\equiv 10a & \end{array}$$

13 behoort tot

$$\begin{array}{llllll} \text{A voor} & b\equiv 0, & b\equiv 2a, & b\equiv 3a, & b\equiv 8a & \\ \text{B}\quad " & b\equiv a, & b\equiv 6a, & b\equiv 11a, & b\equiv 12a & (\text{mod } 13), \\ \text{C}\quad " & b\equiv 5a, & b\equiv 7a, & b\equiv 9a, & a\equiv 0 & \end{array}$$

19 behoort tot (mod 19),

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv a$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 10a$, $b \equiv 18a$, $a \equiv 0$
B „ $b \equiv 5a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 13a$, $b \equiv 14a$, $b \equiv 16a$, $b \equiv 17$
C „ $b \equiv 3a$, $b \equiv 4a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 9a$, $b \equiv 15$

23 behoort tot (mod 23),

A voor $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$, $b \equiv 5a$, $b \equiv 6a$, $b \equiv 7a$, $b \equiv 8a$, $b \equiv 11a$, $b \equiv 15$
B „ $b \equiv a$, $b \equiv 9a$, $b \equiv 13a$, $b \equiv 16a$, $b \equiv 17a$, $b \equiv 18a$, $b \equiv 19a$, $b \equiv 22$
C „ $b \equiv 3a$, $b \equiv 4a$, $b \equiv 10a$, $b \equiv 12a$, $b \equiv 14a$, $b \equiv 20a$, $b \equiv 21a$, $a \equiv 0$.

33. De beschouwing van deze bijzondere theorema's geeft aan leiding tot de volgende opmerkingen.

Voor het gemak zal ik in het volgende de reëele priemgetallen van den vorm $3n - 1$, die ook in de complexe theorie priemgetallen blijven door Q, de priemgetallen van den vorm $3n + 1$ door P aan duiden.

1. Een priemgetal Q behoort, wanneer $a \equiv 0 \pmod{Q}$, tot de klassen A, B, C al naar dat $\dfrac{Q+1}{3}$ van den vorm $3m$, $3m+1$, $3m+2$ is.

2. Een priemgetal P behoort, wanneer $a \equiv 0 \pmod{P}$, tot de klassen A, B, C al naar dat $\dfrac{P-1}{6}$ van den vorm $3m$, $3m+1$, $3m+2$ is.

3. In de gevallen $b \equiv 0$, $b \equiv 2a$ behoort het priemgetal P of Q altijd tot de klasse A.

4. Behoort het priemgetal tot A voor $a \equiv 0$, dan behoort het ook tot A voor $b \equiv a$ en voor $b \equiv -a$. Komt het priemgetal echter in de klasse B of C voor, wanneer $a \equiv 0$, dan komt het voor $b \equiv a$ en voor $b \equiv -a$ in de klasse C of B voor.

5. In het algemeen zijn de criteria van den navolgenden vorm. Is $a \equiv 0$, dan behoort het priemgetal tot eene bepaalde klasse.

Is a niet $\equiv 0$, dan is $b \equiv ax$ en voor elke waarde van x behoort het priemgetal in eene bepaalde klasse, zoodat men de waarden van x in 3 groepen α, β, γ kan onderscheiden, zoodanig dat voor

$b \equiv a\alpha$ het priemgetal tot A,
$b \equiv a\beta$ „ „ „ B,
$b \equiv a\gamma$ „ „ „ C.

klasse correspondeert.

Het totale aantal der congruenties nu, die men op deze wijze voo elk der drie klassen vindt, is even groot en gelijk aan $\frac{Q+1}{3}$ of aan $\frac{P-1}{3}$.

6. Zijn x en y twee getallen, die voldoen aan de congruentie

$$x+y-xy\equiv 0,$$

en behoort x tot α, dan behoort ook y tot α. Is echter $x=\beta$ of $x=\gamma$ dan behoort y respectievelijk tot de γ's of de β's.

Is $xy\equiv 1$ en behoort 1 tot de α's, dan is

$$\begin{array}{ll} \text{voor } x=\alpha' & y=\alpha'', \\ \text{voor } x=\beta' & y=\gamma', \\ \text{voor } x=\gamma' & y=\beta'. \end{array}$$

Is $xy\equiv 1$ en $1=\beta$, dan is

$$\begin{array}{ll} \text{voor } x=\alpha & y=\gamma, \\ \text{voor } x=\beta' & y=\beta'', \\ \text{voor } x=\gamma' & y=\alpha'. \end{array}$$

Is $xy\equiv 1$ en $1=\gamma$, dan is

$$\begin{array}{ll} \text{voor } x=\alpha & y=\beta, \\ \text{voor } x=\beta & y=\alpha, \\ \text{voor } x=\gamma & y=\gamma'. \end{array}$$

34. Wat het bewijs van de bovenstaande opmerkingen betreft alleen het onder 5 gezegde vereischt eenige nieuwe beschouwingen al het overige levert na het voorafgaande geen moeielijkheden op

Ik ga er dan nu toe over het onder 5 opgemerkte algemeen aan te toonen. Hierbij zijn de gevallen, dat het priemgetal gelijk aan Q of aan P is, afzonderlijk te behandelen, en wel zal eerst het eerste geval (verreweg het eenvoudigste) beschouwd worden.

35. Is dan het priemgetal Q van den vorm $3n-1$, dus ook priem in de theorie der complexe getallen van den vorm $a+b\varrho$, dan i volgens de wet van reciprociteit

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{Q}\right].$$

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{b\,\varrho}{Q}\right]=\left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho^{\frac{Q^2-1}{3}}.$$

Nu is

$$\frac{Q+1}{3}\times(Q-2)$$

een veelvoud van 3 en

$$\frac{Q^2-1}{3}-\frac{(Q+1)(Q-2)}{3}=\frac{Q+1}{3},$$

derhalve is voor $a\equiv 0 \pmod{Q}$

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{\frac{Q+1}{3}},$$

waarmede de juistheid van het in art. 33 onder 1 gezegde aange-toond is.

Is a niet door Q deelbaar, dan is x volkomen bepaald door

$$b\equiv a\,x \pmod{Q}$$

en men heeft

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a\,(1+x\,\varrho}{Q}\right]=\left[\frac{1+x\,\varrho}{Q}\right],$$

waaruit reeds blijkt, dat de klasse, waartoe Q behoort, alleen van het getal x afhangt, terwijl voor x blijkbaar de getallen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1$$

kunnen voorkomen.

Wij hebben nu nog slechts deze vraag te beantwoorden: hoeveel der Q grootheden

$$\left[\frac{1+x\,\varrho}{Q}\right]$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1)$$

zijn gelijk aan 1, hoeveel gelijk aan ϱ, hoeveel gelijk aan ϱ^2? Wij beschouwen een volledig systeem niet door den modulus deelbare getallen, voor hetwelk de getallen

$$\alpha+\beta\,\varrho$$
$$\left(\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1\right)$$

genomen kunnen worden, waarbij alleen de combinatie $\alpha=0,\ \beta=0$

weg te laten is. Brengen wij deze $Q^2 - 1$ getallen naar hun cubisch karakter tot 3 groepen A, B, C,

$$\begin{array}{ll} A & \alpha_0 + \beta_0 \varrho, \ldots \\ B & \alpha_1 + \beta_1 \varrho, \ldots \\ C & \alpha_2 + \beta_2 \varrho, \ldots \end{array}$$

dan bevat elk dezer groepen

$$\frac{Q^2 - 1}{3} = (Q - 1) \times \frac{Q + 1}{3}$$

getallen, welk aantal dus een veelvoud van $Q - 1$ is; en de reëele getallen

$$1, 2, 3, \ldots, Q - 1,$$

die met $\beta = 0$ correspondeeren, behooren alle tot A, waaruit voortvloeit, dat zoo $\alpha + \beta \varrho$ tot zekere klasse behoort, ook de met

$$1 (\alpha + \beta \varrho), 2 (\alpha + \beta \varrho), \ldots, (Q - 1)(\alpha + \beta \varrho)$$

congruente getallen tot dezelfde klasse behooren. Is nu α niet gelijk nul, dan zijn

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, (Q - 1)\alpha$$

volgens den modulus Q in zekere volgorde congruent met

$$1, 2, 3, \ldots, Q - 1.$$

Men kan dus de getallen van een klasse, waarbij het reëele deel niet gelijk nul is, in groepen van $Q - 1$ getallen verdeelen, zoodat in elke groep één getal voorkomt van den vorm $1 + x \varrho$.

Hieruit blijkt dus, dat de aantallen der getallen $1 + x \varrho$, die $\left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right]$ gelijk aan 1, ϱ of ϱ^2 maken, zijn

$$\frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \text{ wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = 1,$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \text{ wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = \varrho,$$

$$\frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q+1}{3}, \quad \frac{Q-2}{3}, \text{ wanneer } \left[\frac{\varrho}{Q}\right] = \varrho$$

is, en daar verder boven gevonden werd, dat voor

$$\alpha \equiv 0 \quad (\text{mod } Q)$$

Q tot de klassen A, B of C behoort al n ar dat $\left[\frac{\varrho}{Q}\right]$ gelijk aan 1, ϱ of ϱ^2

voor het geval, dat het priemgetal van den vorm $3n-1$ is.

36. Is het priemgetal, waarvan men het voorkomen in de klasse A, B, C wil onderzoeken, van den vorm $P=3n+1$, dan komt he er dus op aan de waarde van

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]$$

te bepalen; daar P geen priemgetal is in de complexe theorie, zo is het in de eerste plaats noodig, vóórdat de wet van reciprocitei toegepast kan worden, P in zijne primaire priemfactoren te ontbinder

Stel

$$P=(A+B\varrho)(A+B\varrho^2),$$

dan is volgens de reciprociteitswet

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{a+b\varrho}{A+B\varrho^2}\right].$$

Dus heeft men

voor $a\equiv 0 \pmod{P}$

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^{\frac{2(P-1)}{3}}=\varrho^{\frac{P-1}{6}},$$

voor $ax\equiv b \pmod{P}$

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right].$$

Uit de eerste uitkomst voor $a\equiv 0$ blijkt de juistheid van de tweed bewering in art. 33.

Daar P van den vorm $3n+1$ is, zoo heeft de congruentie

$$x^3\equiv 1 \pmod{P}$$

drie verschillende wortels, $1, f, g$, waarbij $f\equiv g^2$.

De beide waarden $-f$, $-g$ kunnen nu niet gelijk aan x zijn i de congruentie

$$b\equiv ax,$$

want uit $b\equiv -af$ zoude volgen

$$a^2-ab+b^2\equiv a^2(1+f+f^2)\equiv 0 \pmod{P},$$

zoodat het priemgetal

$$p=a^2-ab+b^2$$

door P deelbaar zou zijn.

$$0, 1, 2, 3, \ldots, P-1$$

met weglating der beide getallen $P-f$ en $P-g$. Hun aantal derhalve $P-2$, en nu is te onderzoeken, voor hoeveel dezer $P-$ waarden van x de uitdrukking

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right] \quad \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

de waarden 1, ϱ en ϱ^2 aanneemt.

Ik merk nog op, dat

$$\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^{\frac{P-1}{3}}$$

is en dat voor $a\equiv 0 \pmod P$ geldt

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{\frac{2(P-1)}{3}}.$$

Behoort dus ϱ voor den modulus $A+B\varrho$ tot de klasse A, B of C dan behoort gelijktijdig P voor den modulus $a+b\varrho$ (of wat hetzelfde is, voor den reëelen modulus p) tot de klasse A, C of B.

37. Men kan steeds, wanneer een willekeurig getal $\alpha+\beta\varrho$ gegeven is, een daarmede volgens den modulus $A+B\varrho$ congruent getal vinden, waarvan het reëele deel gelijk aan 1 is.

De verdeeling van een volledig systeem niet door den modulus deelbare getallen in drie klassen, volgens hun cubisch karakter kan dus aldus voorgesteld worden

$$\pmod{A+B\varrho}$$

$$\begin{array}{llll}
A & \alpha=1+a\varrho, & \alpha'=1+a'\varrho, & \alpha''=1+a''\varrho, \ldots \\
B & \beta=1+b\varrho, & \beta'=1+b'\varrho, & \beta''=1+b''\varrho, \ldots \\
C & \gamma=1+c\varrho, & \gamma'=1+c'\varrho, & \gamma''=1+c''\varrho, \ldots
\end{array}$$

en daar uit

$$(1+a\varrho)^{\frac{P-1}{3}}-\varrho^k\equiv(A+B\varrho)(C+D\varrho)$$

volgt

$$(1+a\varrho^2)^{\frac{P-1}{3}}-\varrho^{2k}\equiv(A+B\varrho^2)(C+D\varrho^2),$$

voorgesteld worden

$$\begin{array}{llll} & & (\text{mod}\ A+B\varrho^2) & \\ A & 1+a\varrho^2, & 1+a'\varrho^2, & 1+a''\varrho^2, \ldots \\ B & 1+c\varrho^2, & 1+c'\varrho^2, & 1+c''\varrho^2, \ldots \\ C & 1+b\varrho^2, & 1+b'\varrho^2, & 1+b''\varrho^2, \ldots \end{array}$$

De getallen $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', \ldots$ vormen in hun gehee alle getallen van de groep

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ P-1,$$

met uitzondering van het enkele getal, dat $\equiv -\varrho^2 \pmod{A+B\varrho}$ is en dat $(\text{mod}\ P)$ congruent is met een der getallen $-f$, $-g$. De ge vallen nu, dat

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1$$

is, zijn blijkbaar deze

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=1 \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1,$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^2,$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2 \text{ en te gelijker tijd } \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho.$$

Nu is $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=1$ voor $x=a, a', a'', \ldots$, en zal nu te gelijker tij $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1$ zijn, dan moet dus $1+a\varrho$ volgens den modulus $A+B\varrho$ congruent zijn met een der getallen $1+a\varrho^2, 1+a'\varrho^2, \ldots$ dus is te stelle

$$1+a\varrho\equiv 1+a'\varrho^2 \pmod{A+B\varrho^2}.$$

Omgekeerd, zoo aan deze congruentie voldaan is, heeft men

$$\left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho}\right]=1,\quad \left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1.$$

Het aantal malen, dat dit geval zich dus voordoet, is gelijk aan he aantal oplossingen van bovenstaande congruentie. Op soortgelijk wijze voor de beide overige gevallen

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho,\quad \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^2$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2, \quad \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho$$

edeneerende, volgt dat het geheele aantal malen, dat de uitdrukkin

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+A\varrho}\right] \quad \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

gelijk 1 is, voorgesteld wordt door de som van het aantal oplos singen der drie congruenties

$$\left.\begin{aligned} 1+a\varrho &\equiv 1+a'\varrho^2 \\ 1+b\varrho &\equiv 1+b'\varrho^2 \\ 1+c\varrho &\equiv 1+c'\varrho^2 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod } A+B\varrho^2).$$

Evenzoo blijkt, dat het aantal malen, dat bovenstaande uitdrukkin gelijk aan ϱ of aan ϱ^2 wordt, uitgedrukt wordt, in het eerste geva door de som van het aantal oplossingen der congruenties

$$\left.\begin{aligned} 1+b\varrho &\equiv 1+a\varrho^2 \\ 1+c\varrho &\equiv 1+b\varrho^2 \\ 1+a\varrho &\equiv 1+c\varrho^2 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod } A+B\varrho^2),$$

en in het tweede geval door de som van het aantal oplossingen de congruenties

$$\left.\begin{aligned} 1+c\varrho &\equiv 1+a\varrho^2 \\ 1+a\varrho &\equiv 1+b\varrho^2 \\ 1+b\varrho &\equiv 1+c\varrho^2 \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod } A+B\varrho^2).$$

Om onmiddellijk de ontwikkelingen van art. 25—28 te kunnen oepassen, is het iets gemakkelijker alleen congruenties voor den modulus $A+B\varrho$ te beschouwen, zoodat wij, in de voorgaande formules overal ϱ door ϱ^2 vervangende, zullen schrijven, wanneer t, u, le aantallen malen zijn, dat

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\times\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

espectievelijk gelijk aan 1, ϱ of ϱ^2 is:

$=$ som aantal oplossingen van

$$\left.\begin{aligned} 1+a\varrho^2 &\equiv 1+a'\varrho \\ 1+b\varrho^2 &\equiv 1+b'\varrho \\ 1+c\varrho^2 &\equiv 1+c'\varrho \end{aligned}\right\} \quad (\text{mod } A+B\varrho),$$

$u =$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned} 1 + b\,\varrho^2 &\equiv 1 + a\,\varrho \\ 1 + c\,\varrho^2 &\equiv 1 + b\,\varrho \quad (\text{mod A} + \text{B}\,\varrho), \\ 1 + a\,\varrho^2 &\equiv 1 + c\,\varrho \end{aligned}$$

$v =$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned} 1 + c\,\varrho^2 &\equiv 1 + a\,\varrho \\ 1 + a\,\varrho^2 &\equiv 1 + b\,\varrho \quad (\text{mod A} + \text{B}\,\varrho). \\ 1 + b\,\varrho^2 &\equiv 1 + c\,\varrho \end{aligned}$$

38. Hierbij dient nog het volgende opgemerkt te worden. Onder de getallen $a, b, c, a', b', c', \ldots$ komt één der getallen $-f$, $-g$ niet voor. Laten wij onderstellen, dat $-f$ niet voorkomt, zoodat $-g$ wel voorkomt. Dan is het toch duidelijk, dat niettemin deze waarde $-g$ nergens in een der bovenstaande congruenties kan voorkomen, want bijv. uit $1 + a\,\varrho^2 \equiv 1 + a'\,\varrho$ of $a\,\varrho^2 \equiv a'\,\varrho$ zou voor $a = -g$ volgen $a' \equiv a\,\varrho \equiv -\varrho^2 \equiv -f$, want $f \equiv \varrho^2$ en $g \equiv \varrho$ (mod A + B ϱ) en de waarde $a' \equiv -f$ komt niet voor. Daar nu onder de voor x te nemen waarden zoowel $-f$ als $-g$ niet voorkwamen, zoo is hierdoor klaar, dat werkelijk de bovenstaande uitdrukkingen voor t, u en v juist zijn, wanneer de in de congruenties voorkomende getallen a, a', b, b', c, c' op alle mogelijke wijzen uit de groepen $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$ gekozen worden.

Voeren wij nu in plaats van a, b, enz. liever de getallen $\alpha = 1 + a\,\varrho$, $\beta = 1 + b\,\varrho$, enz in, dan gaat bijv. $a\,\varrho^2 \equiv a'\,\varrho$ over in

$$\varrho\,(\alpha - 1) \equiv \alpha' - 1\,,$$

of in

$$\alpha' - \varrho\,\alpha = 1 - \varrho$$

en, evenzoo met de overige congruenties handelende, vinden wij het volgende:

$t =$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned} \alpha' - \varrho\,\alpha &\equiv 1 - \varrho \\ \beta' - \varrho\,\beta &\equiv 1 - \varrho \quad (\text{mod A} + \text{B}\,\varrho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha-\varrho\beta&\equiv1-\varrho\\ \beta-\varrho\gamma&\equiv1-\varrho\\ \gamma-\varrho\alpha&\equiv1-\varrho\end{aligned}\quad(\mathrm{mod}\ A+B\varrho),$$

$v=$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned}\alpha-\varrho\gamma&\equiv1-\varrho\\ \beta-\varrho\alpha&\equiv1-\varrho\\ \gamma-\varrho\beta&\equiv1-\varrho.\end{aligned}\quad(\mathrm{mod}\ A+B\varrho).$$

In het eerste lid dezer congruenties kan het teeken — overal door + vervangen worden, daar twee getallen λ en $-\lambda$ steeds tot dezelfde klasse behooren. Doen wij dit, en vermenigvuldigen wij bovendien met het geheele getal

$$\frac{P-1}{1-\varrho}=\frac{3n}{1-\varrho}=n(1-\varrho^2),$$

dan volgt:

$t=$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned}\alpha'+\varrho\alpha+1&\equiv0\\ \beta'+\varrho\beta+1&\equiv0\\ \gamma'+\varrho\gamma+1&\equiv0\end{aligned}\quad(\mathrm{mod}\ A+B\varrho),$$

$u=$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned}\alpha+\varrho\beta+1&\equiv0\\ \beta+\varrho\gamma+1&\equiv0\\ \gamma+\varrho\alpha+1&\equiv0\end{aligned}\quad(\mathrm{mod}\ A+B\varrho),$$

$v=$ som aantal oplossingen van

$$\begin{aligned}\alpha+\varrho\gamma+1&\equiv0\\ \beta+\varrho\alpha+1&\equiv0\\ \gamma+\varrho\beta+1&\equiv0\end{aligned}\quad(\mathrm{mod}\ A+B\varrho),$$

en wel komt men tot dit besluit in elk der drie onderstellingen, die men kan maken, namelijk dat $n(1-\varrho^2)$ tot de klasse A, B of C behoort. Dit is blijkbaar daaraan toe te schrijven, dat de bovenstaande groepen van 3 congruenties zoodanig zijn, dat zij bij eene cyclische verwisseling van α, β, γ onveranderd blijven.

Er zijn nu drie gevallen te onderscheiden.

I. ϱ behoort tot A, zoodat $\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=1$.

sommen der aantallen oplossingen van de volgende congruenties

u	v	w
$\alpha+\alpha'+1\equiv 0,$	$\alpha+\beta+1\equiv 0,$	$\alpha+\gamma+1\equiv 0,$
$\beta+\beta'+1\equiv 0,$	$\beta+\gamma+1\equiv 0,$	$\beta+\alpha+1\equiv 0,$
$\gamma+\gamma'+1\equiv 0,$	$\gamma+\alpha+1\equiv 0,$	$\gamma+\beta+1\equiv 0,$

er komt volgens art. 25, wanneer wij de daar voor het priemgetal $+b\varrho$ gevonden resultaten overdragen op den modulus $A+B\varrho$ met n norm $3n+1$,

$$\begin{aligned} u &= h+k+j = n-1, \\ v &= j+l+k = n, \\ w &= k+j+l = n. \end{aligned}$$

Volgens art. 36 is in dit geval voor $a\equiv 0$, $\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=1.$

II. ϱ behoort tot B, zoodat $\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho.$

Dan zijn u, v, w de sommen der aantallen oplossingen van de olgende congruenties

u	v	w
$\alpha+\beta+1\equiv 0,$	$\alpha+\gamma+1\equiv 0,$	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0,$
$\beta+\gamma+1\equiv 0,$	$\beta+\alpha+1\equiv 0,$	$\beta+\beta'+1\equiv 0,$
$\gamma+\alpha+1\equiv 0,$	$\gamma+\beta+1\equiv 0,$	$\gamma+\gamma'+1\equiv 0,$

er volgt

$$\begin{aligned} u &= n \\ v &= n \\ w &= n-1. \end{aligned}$$

Volgens art 36 is in dit geval voor $a\equiv 0$, $\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2.$

III. ϱ behoort tot C, zoodat $\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2.$

In dit geval zijn u, v, w de sommen der aantallen oplossingen van

u	v	w
$\alpha+\gamma+1\equiv 0,$	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0,$	$\alpha+\beta+1\equiv 0,$
$\beta+\alpha+1\equiv 0,$	$\beta+\beta'+1\equiv 0,$	$\beta+\gamma+1\equiv 0,$
$\gamma+\beta+1\equiv 0,$	$\gamma+\gamma'+1\equiv 0,$	$\gamma+\alpha+1\equiv 0,$

$$u = n,$$
$$v = n - 1,$$
$$w = n.$$

Volgens art. 36 is hier voor $a \equiv 0$, $\left[\frac{P}{a + b\varrho}\right] = \varrho$.

Hiermede is nu alles bewezen, wat in art. 33 gezegd is omtrent den algemeenen vorm der criteria, waaraan men het voorkomen van een priemgetal in de drie klassen kan onderkennen.

39. Wat de overige opmerkingen in art. 33 betreft, bedenke men, dat het onder 6 voorkomende onmiddellijk volgt uit de beide formules

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{Q}\right] \left[\frac{1 + y\varrho}{Q}\right] = \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{Q}\right],$$

$$\left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + x\varrho}{A + B\varrho^2}\right] \left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 + y\varrho}{A + B\varrho^2}\right] =$$
$$= \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho}\right] \left[\frac{1 - xy + (x + y - xy)\varrho}{A + B\varrho^2}\right].$$

Uit de opmerking, dat voor $b \equiv 2a$ het priemgetal (2, 5, 7, 11, ...) steeds tot de klasse A behoort, kan nog eene gevolgtrekking opgemaakt worden, die het goed schijnt hier te plaatsen. Daar namelijk wegens

$$4p = 4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$$

3 niet tot de priemfactoren van $2a - b$ behoort, zoo volgt, dat alle priemfactoren van $2a - b$ cubische resten van p zijn en derhalve is $2a - b$ zelf cubische rest van p.

40. Tot ditzelfde resultaat voert ook de volgende geheel verschillende beschouwing

Zij $p = 3n + 1$ en laat z een volledig systeem congruente, niet door den modulus $a + b\varrho$ deelbare getallen doorloopen, dan volgt uit

$$(z^3 + 1)^{2n} = z^{6n} + \ldots + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n} z^{3n} + \ldots + 1$$

de congruentie

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv -2 - \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n} \qquad (\mathrm{mod}\ a + b\varrho).$$

Maar aan den anderen kant vormen de getallen $z^3, \ldots$ alle cubisch
sten van $a + b\varrho$, elke rest 3 maal geschreven, en van de getalle
$^3 + 1$ behooren er dus $3h$ tot de klasse A, $3j$ tot B, $3k$ tot C, der
alve is ook

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv 3h + 3k\varrho + 3j\varrho^2 \pmod{a + b\varrho},$$

f volgens de waarden van art. 28

$$\Sigma (z^3 + 1)^{2n} \equiv a - b - 2 - b\varrho\,,$$

lus is

$$-\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n} \equiv a - b - b\varrho \equiv 2a - b \pmod{a + b\varrho},$$

oodat ook

$$2a - b \equiv -\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n} \quad (\text{mod}\ p = 3n + 1)$$

s, welke merkwaardige congruentie het eerst door Jacobi in Crelle
ournal, Bd. 2 gegeven werd, en waarvan het bewijs gewoonlijk u
ormules afgeleid wordt, die in de theorie der cirkelverdeeling voo
omen.

Schrijft men deze congruentie aldus

$$(1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n)^2 (2a - b) \equiv -1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (2n) \pmod{p},$$

en bedenkt dat

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\equiv -n, \\ 2n + 2 &\equiv -(n-1), \\ 2n + 3 &\equiv -(n-2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 3n &\equiv -1, \end{aligned}$$

erwijl n even en $1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (3n) \equiv -1$ is, zoo volgt

$$(1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n)^3 (2a - b) \equiv 1 \pmod{p},$$

waaruit onmiddellijk blijkt, dat $2a - b$ cubische rest van p is, zooa
reeds boven op geheel andere wijze werd aangetoond. Uit dit eers
bewijs bleek bovendien, dat alle deelers van $2a - b$ cubische reste
zijn.

X.

(Haarlem, Arch. Néerl Sci. Soc. Holl., 18, 1883, 358–436.)
(traduction autorisée par l'auteur)

Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques

Le théorème fondamental de la théorie des résidus quadratiques la loi dite de réciprocité, est relatif au rapport réciproque de deu nombres premiers impairs, et dans une théorie complète le caractèr du nombre 2, comme résidu ou non-résidu quadratique d'un autr nombre premier impair, doit donc être déterminé séparément. I ressort de là que le nombre 2 occupe une place à part parmi tou les nombres premiers.

Les théorèmes par lesquels est déterminé le caractère de 2 on été énoncés pour la première fois par Fermat [1]) et démontrés pa Lagrange [2]). Il convient de remarquer toutefois, que la démon stration de Lagrange s'appuie sur des considérations tout à fai semblables à celles par lesquelles, antérieurement, Euler [3]) avai démontré les théorèmes, également énoncés par Fermat, qui fixen le caractère de 3 comme résidu ou non-résidu quadratique. L'insuccè d'Euler dans tous ses efforts pour démontrer les théorèmes concer nant le caractère de 2 (Voir Disq. Arithm., art. 120) est donc d'autan plus surprenant.

Un phénomène entièrement analogue se présente dans la théori des résidus biquadratiques. Ici également, la loi générale de réci

non divisibles par $1+i$, et le caractère de ce nombre premier par
iculier doit être déterminé séparément.

Dans le mémoire de Gauss: Theoria residuorum biquadraticorun commentatio secunda, où les nombres complexes entiers de la form $a+bi$ furent introduits pour la première fois dans la théorie de nombres, le caractère biquadratique de $1+i$ est déterminé complè ement. La démonstration y est de nature purement arithmétiqu et s'appuie essentiellement sur le théorème de l'art. 71, théorèm analogue au lemme formant la base tant de la troisième que de l cinquième démonstration de Gauss pour la loi de réciprocité dan a théorie des résidus quadratiques (Theorematis arithmetici demon stratio nova. Werke, II, p. 1, et Theorematis fundamentalis i doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae Werke, II, p. 47).

Comme on le sait, le troisième mémoire, dans lequel Gauss s'étai proposé de donner la démonstration de la loi générale de réciprocité déjà énoncée dans son second mémoire sur cette théorie, n'a jamai paru.

Les deux premières démonstrations publiées de ce théorèm fondamental sont celles d'Eisenstein, dans le tome 28 du Journa für Mathematik de Crelle, p. 53 et 223. Dans le premier article Lois de réciprocité, il n'a pas traité du caractère de $1+i$, mai bien dans le second article: Einfacher Beweis und Verallgemeinerun des Fundamentaltheorems für die biquadratischen Reste. Eisenstei fait usage, dans l'établissement du caractère de $1+i$, de la lo générale de réciprocité démontrée antérieurement, ce qui en tou cas paraît peu élégant, vu que le passage du simple au compos demande nécessairement que le caractère de $1+i$ soit déduit d'un façon entièrement indépendante du théorème fondamental.

La même remarque est plus ou moins applicable à toutes les autre méthodes qui ont été employées postérieurement pour traiter l théorie des résidus biquadratiques; la marche suivie par Gauss pou démontrer le caractère de $1+i$ est, à mon avis, la seule qui puiss être dite purement arithmétique et complètement indépendante d

la loi générale de réciprocité, de sorte qu'elle satisfait, sous ce rapport, aux conditions qui devront être imposées à tout développement méthodique de la théorie des résidus biquadratiques, prise dans son ensemble.

Des remarques tout à fait analogues peuvent être faites au sujet de la théorie des résidus cubiques. La première démonstration de la loi de réciprocité dans cette théorie — loi énoncée par Jacobi — est celle d'Eisenstein, publiée dans le tome 27 du Journal für Mathematik de Crelle, p. 289. La détermination particulière du caractère de $1-\varrho$, où ϱ est une racine cubique complexe de l'unité, n'a été donnée par Eisenstein que plus tard, dans le tome 28, p. 28 et suiv. du même journal. Pour cette détermination il fait encore usage de la loi générale de réciprocité, et je ne sache pas qu'on ait donné jusqu'ici un mode de déduction du caractère cubique de $1-\rho$ dont la même chose ne puisse être dite.

Comme il est à désirer toutefois, qu'on possède une démonstration du caractère de $1+i$ et de $1-\varrho$ entièrement indépendante de la loi générale de réciprocité, il y aura peut-être quelque intérêt à faire voir comment tous ces théorèmes relatifs aux nombres premiers 2, $1+i$ et $1-\varrho$, théorèmes nécessaires pour compléter les lois de réciprocité, peuvent être démontrés suivant une méthode uniforme.

Le principe de cette méthode consiste à remplacer le nombre premier, dont il s'agit de déterminer le caractère, par un produit congruent de facteurs. On détermine alors le caractère de ces facteurs par des considérations tout à fait analogues à celles dont Gauss s'est servi dans les art 15—20 de son premier mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques (Werke, II, p. 78—87). Gauss n'y a en vue que les nombres réels, et l'objet de son mémoire est la détermination du caractère de 2 dans la théorie réelle. Mais j'ai reconnu que tous les raisonnements de Gauss se laissent reproduire aussi, presque sans changement, dans la théorie des nombres complexes, et la détermination du caractère biquadratique de $1+i$ s'obtient alors immédiatement au moyen d'une considération très simple, suivant laquelle $1+i$ est congru à un produit dont on connaît le caractère des facteurs.

les recherches du premier mémoire de Gauss, la détermination d
caractère de $1+i$ par rapport à un nombre premier de la form
$a+bi$ (où b n'est pas égal à zéro) n'offre plus aucune difficult
une méthode entièrement analogue peut d'ailleurs être employé
dans le cas où le module est un nombre premier réel de la form
$4n+3$. Bien que ce dernier cas permette une démonstration beaucou
plus simple (Voir, par ex., Gauss. Werke, II, art. 68), j'ai cru devoi
le traiter de la même manière que les autres cas, pour faire ressorti
que la méthode en question suffit à établir l'ensemble des théorème

Après avoir effectué la détermination du caractère biquadratiqu
de $1+i$, je démontre, à l'aide des développements antérieurs, tou
les théorèmes que Gauss a trouvés par induction et énoncés dan
l'art. 28 de la Theoria residuorum biquadraticorum commentati
secunda. Si je ne me trompe, cette démonstration est donnée ic
pour la première fois [1]). Elle est entièrement fondée sur la théori
des nombres complexes, théorie qui joue donc ici un rôle puremen
auxiliaire, les théorèmes eux-mêmes ayant seulement rapport à de
nombres réels. Outre la loi de réciprocité dans la théorie des résidu
biquadratiques, la démonstration complète exigeait encore les con
sidérations des art. 19—21.

Je vais maintenant commencer par déduire le caractère de 2 dan
la théorie des

RÉSIDUS QUADRATIQUES.

1. Soit p un nombre premier impair, les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1$$

seront alors divisés en deux groupes. Dans le premier groupe

$$\mathrm{A} \qquad \alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \ldots$$

sont rapportés tous les résidus quadratiques, dans le second group

$$\mathrm{B} \qquad \beta,\ \beta',\ \beta'',\ \ldots$$

tous les non-residus, pour le module p. Chacun des groupes A e

[1]) Une partie de ces théorèmes a été démontrée par M. Lebesgue, dans le Journal d
Liouville, t. 4, p. 51, 52, remarque 1°,

B se compose de $\frac{p-1}{2}$ nombres incongrus par rapport au module p, et il est facile de voir que les deux congruences

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots &\equiv x^{\frac{p-1}{2}}-1\\ (x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots &\equiv x^{\frac{p-1}{2}}+1\end{aligned}\right\} \pmod p$$

sont des congruences identiques; car elles sont de degré moins élevé que la $\left(\frac{p-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ et toutes les deux possèdent manifestement $\frac{p-1}{2}$ racines, à savoir, la première les racines $x=\alpha$, $x=\alpha'$, $x=\alpha''$, ..., la seconde les racines $x=\beta$, $x=\beta'$, $x=\beta''$, ...

En ajoutant l'unité aux nombres de A et de B, on obtient les groupes de nombres suivants

$$\begin{array}{ll} A' & \alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1,\ \ldots \\ B' & \beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1,\ \ldots \end{array}$$

Le nombre des nombres du groupe A′ qui font partie de A et de B sera désigné respectivement par (0.0), (0.1), et le nombre des nombres de B′ qui entrent dans A et B respectivement par (1.0), (1.1).

Ces quatre nombres peuvent être réunis dans le tableau S suivant

$$\begin{array}{cc} (0.0) & (0.1) \\ (1.0) & (1.1). \end{array}$$

Comme les nombres premiers des formes $p=4n+1$ et $p=4n+3$ se comportent d'une manière différente, ces deux cas doivent être traités séparément. Commençons par le premier.

2. Pour $p=4n+1$ le nombre -1 est résidu quadratique, de sorte que les nombres α et $p-\alpha$ entrent simultanément dans A. De même, les nombres β et $p-\beta$ entrent simultanément dans B.

Or (0.0) est évidemment égal au nombre de solutions de la congruence

$$\alpha+1\equiv\alpha' \pmod p,$$

où α et α' doivent être choisis dans le groupe A; et comme on a $\alpha'=p-\alpha''$, on peut dire aussi que (0.0) représente le nombre de solutions de la congruence

$$\alpha+\alpha''+1\equiv 0 \pmod p.$$

En raisonnant de la même manière par rapport aux nombre (0.1), (1.0), (1.1), on reconnaît que le

signe	représente le nombre des solutions de	
(0.0)	$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0$	
(0.1)	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0$	(mod p).
(1.0)	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0$	
(1.1)	$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$	

Il en ressort immédiatement

$$(0.1) = (1.0),$$

une seconde relation entre les nombres du schéma S est fournie pa la considération suivante. A chaque nombre β du groupe B corres pond, dans ce même groupe, un nombre déterminé unique β'', te qu'on a

$$\beta\,\beta'' \equiv 1 \pmod p,$$

et en outre, $\beta'\,\beta''$ est alors congru à un nombre α du groupe A La multiplication de la congruence

$$\beta + \beta' + 1 \equiv 0$$

par β'' donne donc

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0,$$

et en multipliant cette dernière congruence par β on retrouve la première. De là se déduit immédiatement (1.1) = (0.1), de sorte que e schéma S a la forme

$$\begin{matrix} h & j \\ j & j. \end{matrix}$$

Or, dans le groupe A se trouve le nombre $p-1$, et par conséquent dans A′ le nombre p, qui n'entre ni dans A ni dans B. Mais ous les autres nombres de A′ et de B′ font partie soit de A, soit de B. Il en résulte

$$p - 1$$

donc

$$h = \frac{p-5}{4}, \qquad j = \frac{p-1}{4}.$$

La congruence identique

$$(x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} + 1 \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

donne maintenant pour $x = -1$, puisque $\frac{p-1}{2}$ est pair,

$$(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\ldots \equiv 2 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Le nombre des non-résidus parmi les nombres $\beta+1$, $\beta'+1$, $\beta''+1,\ldots$ est $(1.1) = j = \frac{p-1}{4}$.

Si donc j est pair, ou

$$p = 8n+1,$$

2 est résidu quadratique de p.

Si, au contraire j est impair, ou

$$p = 8n+5,$$

2 est non-résidu de p.

3. Pour $p = 4n+3$ le nombre -1 est non-résidu, et le groupe B est identique au groupe des nombres $p-\alpha$, $p-\alpha'$, $p-\alpha''$, ...

Le signe (0.0) représente alors le nombre des solutions de la congruence $\alpha+1 \equiv \alpha'$ (mod p) ou aussi, puisque $\alpha' = p-\beta$, le nombre des solutions de $\alpha+\beta+1 \equiv 0$.

On voit ainsi que le

signe	représente le nombre des solutions de
(0.0)	$\alpha+\beta+1 \equiv 0$
(0.1)	$\alpha+\alpha'+1 \equiv 0$ (mod p),
(1.0)	$\beta+\beta'+1 \equiv 0$
(1.1)	$\beta+\alpha+1 \equiv 0$

de sorte que $(0.0) = (1.1)$. Si, en outre, on a de nouveau $\beta\beta'' \equiv 1$ $\beta'\beta'' \equiv \alpha$, la congruence $\beta+\beta'+1 \equiv 0$, étant multipliée par β'', donne

$$1 + \alpha + \beta'' \equiv 0$$

d'où résulte, d'une manière analogue à celle indiquée dans le ca précédent, la relation $(1.0) = (0.0)$. Le schéma S a donc pour $p = 4n +$ a forme

$$\begin{matrix} h & j \\ h & h. \end{matrix}$$

Comme le nombre $p-1$ entre dans le groupe B, et par conséquen dans B', mais que d'ailleurs tous les autres nombres de A' et d B' entrent soit dans A, soit dans B, on trouve

$$h + j = \frac{p-1}{2},$$

$$2h = \frac{p-1}{2} - 1,$$

donc

$$h = \frac{p-3}{4}, \qquad j = \frac{p+1}{4}.$$

Dans la congruence identique

$$(x-a)(x-a')(x-a'')\ldots \equiv x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \qquad (\text{mod } p)$$

l résulte pour $x = -1$, vu que $\frac{p-1}{2}$ est impair,

$$(a+1)(a'+1)(a''+1)\ldots \equiv 2 \qquad (\text{mod } p),$$

et le nombre des non-résidus, parmi les nombres $a+1$, $a'+1$, $a''+1$, .. est $(0.1) = j = \frac{p+1}{4}$.

Si l'on a donc j pair, ou

$$p = 8n + 7,$$

2 est résidu quadratique de p.

Si, au contraire, j est impair, ou

$$p = 8n + 3,$$

4. Le nombre premier impair (c'est-à-dire non divisible par $1+i$) $m=a+bi$ sera toujours supposé primaire, ce mot étant pris dans l'acception qui lui est donnée par Gauss, de sorte qne $a-1$ et b suivant le module 4, soient ou bien tous les deux $\equiv 0$, ou bien tous les deux $\equiv 2$.

On sait que, dans la théorie des nombres complexes entiers de la forme $a+bi$, les nombres premiers se composent:

premièrement, des nombres premiers réels q de la forme $4r+3$, nombres qui doivent être pris négativement pour être primaires;

secondement, des facteurs premiers complexes des nombres premiers réels de la forme $4n+1$. Ces nombres premiers complexes sont de la forme $a+bi$, où b n'est pas égal à zéro, et deviennent primaires lorsqu'on les multiplie par l'une des quatres unités 1, i, -1, $-i$, convenablement choisie. Ils peuvent à leur tour être distingués en deux espèces, suivant que, lorsque $a+bi$ est primaire $a-1$ et b sont tous les deux divisibles par 4, ou tous les deux le double d'un nombre impair.

D'après cela, je partage les nombres premiers primaires en ces trois classes:

I. Les nombres premiers réels q de la forme $4r+3$, pris négativement.

II. Les nombres premiers complexes de la forme $4r+1+4si$

III. Les nombres premiers complexes de la forme $4r+3+(4s+2)i$.

Le nombre premier (dans la théorie complexe) sera toujours désigné ici par M, la norme de M par μ. En outre, p représentera toujours un nombre premier réel (positif) de la forme $4r+1$, q un nombre premier réel (positif) de la forme $4r+3$. Pour les nombres premiers de la première espèce, on a donc $M=-q$, $\mu=q^2$, pour ceux de la deuxième et de la troisième espèce $\mu=p$.

Je remarquerai encore que pour les deux espèces I et II la norme μ est de la forme $8r+1$, et pour III de la forme $8r+5$. Cette circonstance fait que les deux premières espèces de nombres premiers peuvent, jusqu'à un certain point, être traitées conjointement.

itre égal, aux trois classes de nombres premiers.

5. Soient donc M le nombre premier, μ la norme. Un systèm complet de nombres incongrus et non divisibles par le module s compose de $\mu - 1$ nombres qui, suivant leur caractère biquadratiqu par rapport à M, peuvent être distribués en quatre classes, com prenant chacune $\frac{\mu - 1}{4}$ nombres

$$\begin{array}{llll}
A & \alpha, & \alpha', & \alpha'', \ldots \\
B & \beta, & \beta', & \beta'', \ldots \\
C & \gamma, & \gamma', & \gamma'', \ldots \\
D & \delta, & \delta', & \delta'', \ldots
\end{array}$$

Dans la première classe A sont rangés tous les nombres α, α', α caractère biquadratique 0, dans les groupes B, C, D les nombre caractère biquadratique 1, 2, 3.

Disons encore, par surcroît, que le caractère biquadratique es pris ici dans le sens adopté par Gauss, de sorte que les nombre les quatre classes sont caractérisés par les congruences

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1, \quad \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i, \quad \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1, \quad \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \qquad (\text{mod M}).$$

Pour plus de commodité, je me servirai toutefois aussi du symbol ntroduit par Jacobi, et pourrai donc écrire

$$\left(\left(\frac{\alpha}{\mathrm{M}}\right)\right) = 1, \quad \left(\left(\frac{\beta}{\mathrm{M}}\right)\right) = i, \quad \left(\left(\frac{\gamma}{\mathrm{M}}\right)\right) = -1, \quad \left(\left(\frac{\delta}{\mathrm{M}}\right)\right) = -i.$$

Notons enfin, une fois pour toutes, que dans la suite toutes le congruences auront rapport au module premier M, tant qu'un autr module ne sera pas expressément indiqué.

Je donne ici un exemple de la distribution des résidus (mod M), l'exception du résidu 0, dans les quatre classes A, B, C, D, pou chacune des trois espèces de nombre premiers qui ont été distin guées dans le n° 4.

$$\mathrm{M} = -7, \qquad \mu = 49.$$

$$\begin{array}{lllllll}
A & 1, & -2, & -3, & -1, & 2, & 3, \\
 & 3i, & i, & -2i, & -3i, & -i, & 2i.
\end{array}$$

	−1 + 3i,	2 + i,	3 − 2i,	1 − 3i,	−2 − i,	−3 + 2
C	−3 + 3i,	−1 + i,	2 − 2i,	3 − 3i,	1 − i,	−2 + 2
	−2 − 2i,	−3 − 3i,	−1 − i,	2 + 2i,	3 + 3i,	1 +
D	3 + 2i,	1 + 3i,	−2 + i,	−3 − 2i,	−1 − 3i,	2 −
	1 + 2i,	−2 + 3i,	−3 + i,	−1 + 2i,	2 − 3i,	3 −

$$M = -3 - 8i, \qquad \mu = 73.$$

	1,	−3i,	−1 − 3i,	−1,	3i,	1 + 3
A	3 + 2i,	1 + 2i,	−2,	−3 − 2i,	−1 − 2i,	2,
	−1 − 4i,	−4,	−3 + 4i,	1 + 4i,	4,	3 − 4
	1 − 2i,	5 + 2i,	1 − 4i,	−1 + 2i,	−5 − 2i,	−1 + 4
B	−1 − i,	−3 + 3i,	−2 + 4i,	1 + i,	3 − 3i,	2 − 4
	2 + 3i,	1 − 3i,	2 + 2i,	−2 − 3i,	−1 + 3i,	−2 − 2
	4i,	4 + 3i,	4 − i,	−4i,	−4 − 3i,	−4 + i
C	−3 + i,	i,	3,	3 − i,	−i,	−3,
	2i,	−2 + 3i,	−2 + i,	−2i,	2 − 3i,	2 − i
	−3 − i,	2 − 2i,	−3 + 2i,	3 + i,	−2 + 2i,	3 − 2i
D	−4 − i,	2 + i,	−2 + 5i,	4 + i,	−2 − i,	2 − 5i
	4 + 2i,	1 − i,	−3 − 3i,	−4 − 2i,	−1 + i,	3 + 3i

$$M = -5 + 6i, \qquad \mu = 61.$$

	1,	−3,	−2 + i,	1 + 3i,	−2 + 2i,
A	−4,	1 + i,	3 + 2i,	−3 − i,	3 − 2i,
	−1 − 4i,	2 + i,	2i,	−5,	4 + i.
	1 − i,	2 − 3i,	−1 + 3i,	−2 − 3i,	4i,
B	1 − 2i,	2,	5i,	1 − 4i,	−4 + i,
	1 + 2i,	3 − i,	2 + 2i,	−i,	3i.
	−2i,	5,	−4 − i,	1 + 4i,	−2 − i,
C	−1 − 3i,	2 − 2i,	−1,	3,	2 − i,
	3 + i,	−3 + 2i,	4,	−1 − i,	−3 − 2i.
	−2 − 2i,	i,	−3i,	−1 − 2i,	−3 + i,
D	2 + 3i,	−4i,	−1 + i,	−2 + 3i,	1 − 3i,
	−1 + 4i,	4 − i,	−1 + 2i,	−2,	−5i.

De même qu'au n° 1, on se convainc immédiatement de l'identit
des congruences suivantes

$$\left.\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\dots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}-1\\ (x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\dots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}-i\\ (x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\dots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+1\\ (x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\dots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+i\end{aligned}\right\} \pmod{M},$$

d'où il suit pour $x = -1$, en distinguant les cas $\mu = 8n+1$ e
$\mu = 8n+5$

$$\left.\begin{aligned}\mu = 8n+1 \qquad &(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\dots \equiv 1-i\\ &(\gamma+1)(\gamma'+1)(\gamma''+1)\dots \equiv 2\\ &(\delta+1)(\delta'+1)(\delta''+1)\dots \equiv 1+i\\ \mu = 8n+5 \qquad &(\alpha+1)(\alpha'+1)(\alpha''+1)\dots \equiv 2\\ &(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\dots \equiv 1+i\\ &(\delta+1)(\delta'+1)(\delta''+1)\dots \equiv 1-i\end{aligned}\right\} \pmod{M}.$$

6. Considérons maintenant les nouveaux groupes de nombre
A′, B′, C′ et D′ qui résultent de l'addition de l'unité aux nombre
de A, B, C et D

$$\begin{array}{ll} A' & \alpha+1,\ \alpha'+1,\ \alpha''+1,\dots\\ B' & \beta+1,\ \beta'+1,\ \beta''+1,\dots\\ C' & \gamma+1,\ \gamma'+1,\ \gamma''+1,\dots\\ D' & \delta+1,\ \delta'+1,\ \delta''+1,\dots \end{array}$$

désignons le nombre des nombres de A′ qui sont congrus à de
nombres de A, B, C, D respectivement par

$$(0.0),\ (0.1),\ (0.2),\ (0.3);$$

et le nombre des nombres de B′ qui sont congrus à des nombre
de A, B, C, D respectivement par

$$(1.0),\ (1.1),\ (1.2),\ (1.3).$$

De même, les nombres

$$(2.0),\ (2.1),\ (2.2),\ (2.3)$$

auront rapport au groupe C′, et

$$(3.0),\ (3.1),\ (3.2),\ (3.3)$$

Ces 16 nombres (0.0), (0.1), etc peuvent être tous réunis dans
tableau quadratique S suivant

$$\begin{array}{cccc}
(0.0) & (0.1) & (0.2) & (0.3) \\
(1.0) & (1.1) & (1.2) & (1.3) \\
(2.0) & (2.1) & (2.2) & (2.3) \\
(3.0) & (3.1) & (3.2) & (3.3)
\end{array}$$

et pour les exemples donnés au n⁰ 5, j'obtiens

	$M = -7,\ \mu = 49.$	$M = -3 - 8i,\ \mu = 73.$	$M = -5 + 6i,\ \mu = 6$
S	$\begin{array}{cccc} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{cccc} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \end{array}$

D'après les congruences du numéro précédent, on a
pour $\mu = 8n + 1$

$$(\delta + 1)(\delta' + 1)(\delta'' + 1)\ldots \equiv 1 + i$$

et pour $\mu = 8n + 5$

$$(\beta + 1)(\beta' + 1)(\beta'' + 1)\ldots \equiv 1 + i.$$

Or, le nombres des nombres de

$$\delta + 1,\ \delta' + 1,\ \delta'' + 1, \ldots$$

qui appartiennent respectivement aux classes A, B, C, D, étant (3.0), (3.1), (3.2), (3.3), il s'ensuit immédiatement que pour $\mu = 8n + 1$ le caractère biquadratique de $1 + i$, suivant le module 4, sera congru à

$$(3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3)$$

t de même, dans le cas de $\mu = 8n + 5$, congru à

$$(1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3).$$

Dès que les nombres (0.0), (0.1), ... seront déterminés, le caractère biquadratique de $1 + i$ sera donc aussi immédiatement connu.

Il s'agit donc, étant donné le nombre premier primaire $M = a + bi$ d'en déduire directement les nombres du tableau S. Les considérations nécessaires à cet effet sont essentiellement les mêmes que celles développées par Gauss dans les art. 16—20 de la Theoria residuorum biquadraticorum commentatio prima.

mais il est facile de voir que ce qu'il y donne est dans un étroi rapport avec la question dont nous nous occupons en ce moment.

Pour avoir sous les yeux le développement complet, il sera né cessaire de reproduire ici l'argumentation de Gauss, avec les légères modifications réclamées par la différence des sujets.

Il faut remarquer, à cet égard, que pour un nombre premier $M = -q$ appartenant à la première classe du n° 4, il n'existe, dans la théorie réelle de Gauss, rien d'analogue à ce qui sera exposé ici dans la théorie des nombres complexes entiers.

Pour ce qui va suivre, il est nécessaire de traiter séparément le cas où la norme μ est de la forme $8n+1$ et celui où elle est de la forme $8n+5$. Je commence par le premier dans lequel le nombre premier M appartient donc à l'une des deux premières classes du n° 4.

7. Pour $\mu = 8n+1$, on a $(-1)^{\frac{\mu-1}{4}} = +1$, de sorte que -1 est résidu biquadratique de M et fait partie de la classe A, ou à proprement parler, est congru suivant le module M à un nombre de A. Mais, dans ce genre de considérations, il est permis, attendu que les nombres congrus entre eux peuvent se remplacer, de les regarder comme égaux, et pour la commodité je ferai usage de cette observation, dont il ne pourra résulter aucune obscurité.

Le caractère biquadratique de -1 étant donc égal à zéro, il s'en suit que lorsque α, β, γ, δ appartiennent respectivement aux classes A, B, C, D, les nombres $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ entrent aussi dans ces mêmes classes, $-\alpha$ dans A, $-\beta$ dans B, $-\gamma$ dans C et $-\delta$ dans D.

Or, le nombre (0.0) est évidemment égal au nombre des solutions de la congruence

$$\alpha + 1 \equiv \alpha' \pmod{M},$$

où α et α' sont à prendre arbitrairement dans le groupe A; mais comme à chaque nombre α' correspond un nombre $\alpha'' = p - \alpha'$, ce nombre de solutions est le même que celui de la congruence

$$\alpha + \alpha'' + 1 \equiv 0 \pmod{M},$$

où α et α'' doivent également être pris dans A.

En raisonnant exactement de la même manière au sujet des nom-bres (0.1), (0.2), etc., on trouve que le

$$\begin{array}{cl}
\text{signe} & \text{représente le nombre des solutions de} \\
(0.0) & \alpha+\alpha'+1\equiv 0 \\
(0.1) & \alpha+\beta+1\equiv 0 \\
(0.2) & \alpha+\gamma+1\equiv 0 \\
(0.3) & \alpha+\delta+1\equiv 0 \\
(1.0) & \beta+\alpha+1\equiv 0 \\
(1.1) & \beta+\beta'+1\equiv 0 \\
(1.2) & \beta+\gamma+1\equiv 0 \\
(1.3) & \beta+\delta+1\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{M}). \\
(2.0) & \gamma+\alpha+1\equiv 0 \\
(2.1) & \gamma+\beta+1\equiv 0 \\
(2.2) & \gamma+\gamma'+1\equiv 0 \\
(2.3) & \gamma+\delta+1\equiv 0 \\
(3.0) & \delta+\alpha+1\equiv 0 \\
(3.1) & \delta+\beta+1\equiv 0 \\
(3.2) & \delta+\gamma+1\equiv 0 \\
(3.3) & \delta+\delta'+1\equiv 0
\end{array}$$

Il en résulte donc immédiatement ces six relations

$$(0.1)=(1.0),\qquad (0.2)=(2.0),\qquad (0.3)=(3.0),$$
$$(1.2)=(2.1),\qquad (1.3)=(3.1),$$
$$(2.3)=(3.2).$$

Cinq autres relations entre les nombres (0.0), (0.1), etc. s'obtiennent par la considération suivante. Si α, β, γ sont des nombres de A, B, C, et qu'on détermine x, y, z de telle sorte qu'on ait

$$\alpha x\equiv 1,\ \beta y\equiv 1,\ \gamma z\equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{M}),$$

x appartient évidemment à la classe A, y à D, z à C, de sorte qu'on peut écrire

$$\alpha\alpha'\equiv 1,\ \beta\delta\equiv 1,\ \gamma\gamma'\equiv 1.$$

Si l'on multiplie maintenant, en considérant une solution déterminée de $\alpha+\beta+1\equiv 0$, cette congruence par δ, on obtient $\delta'+1+\delta\equiv 0$ où $\delta'\equiv\alpha\delta$ appartient à D. Réciproquement $\delta'+1+\delta\equiv 0$, multipliée par β, donne de nouveau $\alpha+\beta+1\equiv 0$. Il ressort de là que les deux congruences

$$\alpha+\beta+1\equiv 0 \text{ et } \delta+\delta'+1\equiv 0$$

ont le même nombre de solutions, ou (0.1) = (3.3)

Exactement de la même manière, on a

$$\begin{aligned}
\gamma'(\alpha+\gamma+1) &\equiv \gamma''+1+\gamma',\\
\beta\ (\alpha+\delta+1) &\equiv \beta'+1+\beta,\\
\delta\ (\beta+\gamma+1) &\equiv 1+\beta'+\delta,\\
\gamma'(\beta+\gamma+1) &\equiv \delta+1+\gamma',
\end{aligned}$$

l'où l'on conclut pareillement

$$(0.2)=(2.2),\qquad (0.3)=(1.1),\qquad (1.2)=(1.3)=(2.3).$$

En tout, il existe donc onze relations entre les seize nombres d
schéma S, et ces nombres sont ainsi ramenés à cinq, différents entr
eux, qui seront désignés par h, j, k, l, m. Le schéma S prend alor
cette forme

$$\begin{array}{cccc}
h & j & k & l\\
j & l & m & m\\
k & m & k & m\\
l & m & m & j
\end{array}$$

8. Le nombre -1 entre dans A, et correspond donc au nombr
0 de A′. Ce nombre 0 de A′ ne se trouve dans aucune des classe
A, B, C, D, mais tout autre nombre de A′ entre évidemment dan
l'un des groupes A, B, C ou D. Comme $\mu=8n+1$, $\frac{\mu-1}{4}=2n$, o
a donc

$$(0.0)+(0.1)+(0.2)+(0.3)=2n-1.$$

Tous les nombres de B′, C′, D′ font partie d'une des classes A, B
C, D, de sorte qu'on a

$$\begin{aligned}
(1.0)+(1.1)+(1.2)+(1.3)&=2n,\\
(2.0)+(2.1)+(2.2)+(2.3)&=2n,\\
(3.0)+(3.1)+(3.2)+(3.3)&=2n.
\end{aligned}$$

Ces quatre équations se réduisent aux trois relations suivante
entre h, j, k, l et m

$$h+j+k+l=2n-1$$

congruence

$$\alpha+\beta+\gamma+1 \equiv 0 \pmod{M},$$

où α, β, γ doivent être choisis de toutes les manières possibles dan les classes A, B, C.

Si l'on prend d'abord pour α successivement tous les nombres d A, il arrive respectivement h, j, k, l fois que $\alpha+1$ appartienne A, B, C, D, et le cas unique de $\alpha+1 \equiv 0$ peut être négligé, vu qu a congruence $\beta+\gamma \equiv 0$ n'admet aucune solution.

Pour chacune des h valeurs qui rendent $\alpha+1 \equiv \alpha_0$, β et γ doiven alors être choisis de façon qu'on ait

$$\alpha_0+\beta+\gamma \equiv 0.$$

Le nombre des solutions de cette congruence (pour une valeu donnée de α_0) est égal à m, comme on le reconnaît immédiatement e la multipliant par α_0', ce qui la transforme, à cause de $\alpha_0 \alpha_0' \equiv 1 \pmod{M}$ en

$$1+\beta'+\gamma' \equiv 0.$$

Comme ce raisonnement est applicable à chacune des h valeur qui font que $\alpha+1$ appartient de nouveau à A, on obtient de cette manière hm solutions de la congruence

$$1+\alpha+\beta+\gamma \equiv 0.$$

Il arrive ensuite j fois que $\alpha+1$ appartienne à B, et pour chaque valeur déterminée $\alpha+1 \equiv \beta_0$ la congruence

$$\beta_0+\beta+\gamma \equiv 0$$

a le même nombre de solutions que celle-ci

$$1+\alpha+\beta' \equiv 0,$$

ce nombre est donc égal à j. Cela ressort immédiatement de

$$\delta_0(\beta_0+\beta+\gamma) \equiv 1+\alpha+\beta',$$

lorsque $\beta_0 \delta_0 \equiv 1$.

Ces valeurs de α, qui font appartenir $\alpha+1$ à B, donnent donc en tout jj solutions de la congruence considérée.

Pour $\alpha+1 \equiv \gamma_0$, ce qui arrive k fois, la congruence

$$\gamma_0+\beta+\gamma \equiv 0$$

$$\gamma_0'(\gamma_0+\beta+\gamma)\equiv 1+\delta+\alpha.$$

Les valeurs de α qui font appartenir $\alpha+1$ à C fournissent don
en tout kl solutions.

A-t-on enfin $\alpha+1=\delta_0$, ce qui arrive l fois, alors la congruenc

$$\delta_0+\beta+\gamma\equiv 0$$

a, en raison de

$$\beta_0(\delta_0+\beta+\gamma)\equiv 1+\gamma+\delta,$$

m solutions, et ces valeurs de α donnent donc lm solutions.

Le nombre total des solutions de la congruence

$$\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{M})$$

est donc

$$hm+jj+kl+lm.$$

Mais ce nombre peut encore être calculé d'une autre manière
Si l'on prend pour β successivement tous les nombres de B, il arriv
, l, m, m fois que $\beta+1$ appartienne aux groupes A, B, C, D. Or
pour chacun de ces quatre nombres, on trouve qu'il y a respecti
vement k, m, k, m solutions de la congruence donnée, de sorte qu
le nombre total des solutions est

$$jk+lm+mk+mm.$$

10. En égalant entre elles ces deux expressions du nombre de
solutions de $\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0$, on a

$$0=hm+jj+kl-jk-km-mm,$$

ou, si l'on élimine h à l'aide de la valeur $h=2m-k-1$, qu
se déduit facilement des équations obtenues dans le n⁰ 8 entre h, j
k, l, m,

$$0=(k-m)^2+jj+kl-jk-kk-m.$$

D'après les relations du n⁰ 8, on a

$$k=\tfrac{1}{2}(j+l)$$

et cette valeur étant substituée dans $jj+kl-jk-kk$, cette expres
sion devient égale à $\frac{1}{4}(l-j)^2$, de sorte que l'équation précédente
après multiplication par 4, se transforme en

$$0=4(k-m)^2+(l-j)^2-4m;$$

mais on a
$$4m = 2(k+m) - 2(k-m) = 2n - 2(k-m),$$
par conséquent
$$2n = 4(k-m)^2 + 2(k-m) + (l-j)^2,$$
ou bien
$$\mu = 8n+1 = [4(k-m)+1]^2 + 4(l-j)^2,$$
et, en posant
$$4(k-m)+1 = \mathrm{A}, \quad 2(l-j) = \mathrm{B},$$
il vient donc
$$\mu = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2.$$

Dans cette équation on a $\mathrm{A} \equiv 1 \pmod 4$, et B pair.

Il est maintenant facile d'exprimer h, j, k, l, m en A et B, ce qui donne
$$\begin{aligned}
8h &= 4n - 3\mathrm{A} - 5,\\
8j &= 4n + \mathrm{A} - 2\mathrm{B} - 1,\\
8k &= 4n + \mathrm{A} - 1,\\
8l &= 4n + \mathrm{A} + 2\mathrm{B} - 1,\\
8m &= 4n - \mathrm{A} + 1.
\end{aligned}$$

Jusqu'ici nous avons seulement supposé que la norme μ avait la forme $8n+1$; mais, pour la détermination ultérieure de A et B, il faut maintenant traiter séparément les cas I et II du n° 4.

11. Soit donc, en premier lieu
$$\mathrm{M} = -q = -(4r+3).$$
Dans ce cas, on a
$$\mu = \mathrm{M}^2 = q^2$$
et par conséquent
$$q^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2.$$

Le nombre q étant un nombre premier de la forme $4r+3$, on sait que q^2 ne peut être représenté que d'une seule manière comme la somme de deux carrés, savoir, en prenant $\pm q$ pour la base du carré impair, et pour la base de l'autre carré 0; effectivement, si aucun des deux nombres A et B n'était égal à zéro ou divisible par q, on pourrait déterminer un nombre x, différent de zéro, de telle sorte que
$$\mathrm{A}x \equiv \mathrm{B} \pmod q.$$

Mais de $q^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$, il suit
$$\mathrm{A}^2 \equiv -\mathrm{B}^2 \pmod q)$$

$$A^2 x^2 \equiv B^2 \pmod{q},$$

par conséquent on aurait

$$x^2 \equiv -1 \pmod{q}.$$

Or, cette dernière congruence est impossible, parce que -1 e non-résidu quadratique de q.

De $q^2 = A^2 + B^2$ il suit donc nécessairement

$$A = \pm q, \qquad B = 0,$$

et comme $A \equiv 1 \pmod{4}$, le signe de A se trouve complètement de terminé et on a

$$A = -q = M.$$

A et B étant ainsi trouvés, on a finalement

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - 3M - 5, \\ 8j &= 4n + M - 1, \\ 8k &= 4n + M - 1, \\ 8l &= 4n + M - 1, \\ 8m &= 4n - M + 1, \end{aligned}$$

où $8n + 1 = M^2$.

Par ces formules, la dépendance entre les nombres du tablea S et le nombre premier M est donc exprimée de la manière la plu simple, dans le cas où M appartient à la première classe du n⁰ 4

12. Si, en second lieu, on suppose $M = a + bi$, où $a - 1 \equiv b \equiv 0 \pmod{4}$ et où la norme $\mu = a^2 + b^2$ est un nombre premier réel, on a don

$$\mu = a^2 + b^2 = A^2 + B^2.$$

Or, un nombre premier de la forme $4k + 1$ ne peut être repré senté que d'une seule manière par la somme de deux carrés, e comme a et A sont tous les deux $\equiv 1 \pmod{4}$, il s'ensuit $A = a$, $B = \pm b$

Le signe de B est déterminé par les considérations suivantes, qu demandent la démonstration préalable de cette proposition auxiliaire

Lorsque z parcourt un système complet de résidus (mod M), à l'ex ception du terme divisible par M, on a

$$\Sigma z^t \equiv -1 \quad \text{ou} \quad \equiv 0 \pmod{M},$$

suivant que t est divisible ou non par $\mu - 1$.

divisible par $\mu - 1$, on a $z^t \equiv 1$, donc $\Sigma z^t \equiv \mu - 1 \equiv -1 \pmod{M}$.

Pour démontrer aussi la seconde partie, soit g une racine primitive pour le nombre premier M, de sorte que les valeurs parcourues par z soient congrues à

$$g^0,\ g^1,\ g^2,\ g^3,\ \ldots,\ g^{\mu-2}.$$

Il en résulte

$$\Sigma z^t \equiv 1 + g^t + g^{2t} + \ldots + g^{(\mu-2)t} \pmod{M},$$

ou

$$(1 - g^t)\,\Sigma z^t \equiv 1 - g^{(\mu-1)t} \equiv 0 \pmod{M}.$$

Or, si t n'est pas divisible par $\mu - 1$, $1 - g^t$ n'est pas divisible par M, et on a par conséquent $\Sigma z^t \equiv 0$ c. q. f. d.

Cette proposition auxiliaire est évidemment valable pour un nombre premier M quelconque.

D'après le développement binomial, on a maintenant

$$(z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} = z^{\frac{\mu-1}{2}} + \ldots + 1,$$

d'où il suit, lorsque le signe Σ se rapporte aux mêmes valeurs de z que tout à l'heure,

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \pmod{M}.$$

Mais, d'un autre côté, les nombres z^2, dans leur ensemble, forment évidemment tous les nombres des groupes A et C, chacun de ces nombres étant pris deux fois. Des nombres

$$z^2 + 1$$

il y en a donc

$2\,(0.0) + 2\,(2.0)$ qui appartiennent à A,
$2\,(0.1) + 2\,(2.1)$ " " " B,
$2\,(0.2) + 2\,(2.2)$ " " " C,
$2\,(0.3) + 2\,(2.3)$ " " " D,

et comme les puissances $\frac{\mu-1}{4}$ des nombres de A, B, C, D sont respectivement congrues à $1,\ i,\ -1,\ -i$, on a donc

$$\begin{aligned}\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv \quad 2\ [(0.0) + (2.0) - (0.2) - (2.2)] + \\ &\quad + 2i\,[(0.1) + (2.1) - (0.3) - (2.3)] \\ &\equiv \quad 2\ (h-k) + 2i\,(j-l).\end{aligned}$$

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -a-1-\mathrm{B}\, i.$$

De la comparaison avec le premier résultat,

$$\Sigma (z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1,$$

il suit

$$a+\mathrm{B}\, i \equiv 0 \qquad (\text{mod } \mathrm{M}=a+b\, i),$$

donc

$$\mathrm{B}=b.$$

Par là, les valeurs de h, j, k, l, m du n⁰ 10 se transforment f
lement en

$$\begin{aligned} 8\,h &= 4\,n-3\,a-5, \\ 8\,j &= 4\,n+a-2\,b-1, \\ 8\,k &= 4\,n+a-1, \\ 8\,l &= 4\,n+a+2\,b-1, \\ 8\,m &= 4\,n-a+1, \end{aligned}$$

où $8\,n+1=a^2+b^2$ est donc la norme du nombre premier M.

13. Après avoir traité les deux cas dans lesquels $\mu=8\,n+1$
faut maintenant considérer le cas $\mu=8\,n+5$.

Puisque $\frac{\mu-1}{4}$ est alors impair, -1 appartient au groupe C,
comme il est facile de le voir, les nombres

$$p-\alpha,\ p-\alpha',\ p-\alpha'',\ldots$$

appartiennent tous à C, tandis que

$$p-\beta,\ p-\beta',\ p-\beta'',\ldots$$

appartiennent tous à D.

Moyennant ces remarques, on reconnaît sans peine que le

signe	représente le nombre des solutions de	
(0.0)	$\alpha+\gamma+1\equiv 0$	
(0.1)	$\alpha+\delta+1\equiv 0$	
(0.2)	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$	
(0.3)	$\alpha+\beta+1\equiv 0$	(mod M),
(1.0)	$\beta+\gamma+1\equiv 0$	
(1.1)	$\beta+\delta+1\equiv 0$	
(1.2)	$\beta+\alpha+1\equiv 0$	
(1.3)	$\beta+\beta'+1\equiv 0$	

$$
\begin{array}{ll}
(2.1) & \gamma+\delta+1\equiv 0 \\
(2.2) & \gamma+\alpha+1\equiv 0 \\
(2.3) & \gamma+\beta+1\equiv 0 \\
(3.0) & \delta+\gamma+1\equiv 0 \\
(3.1) & \delta+\delta'+1\equiv 0 \\
(3.2) & \delta+\alpha+1\equiv 0 \\
(3.3) & \delta+\beta+1\equiv 0,
\end{array}
\qquad (\mathrm{mod}\ \mathrm{M}),
$$

coulent les six relations

$$
(0.0)=(2.2),\qquad (0.1)=(3.2),\qquad (0.3)=(1.2),
$$
$$
(1.0)=(2.3),\qquad (1.1)=(3.3),
$$
$$
(2.1)=(3.0).
$$

e, de même que précédemment, $\alpha\alpha'\equiv\beta\delta\equiv\gamma\gamma'\equiv 1$, on a

$$
\begin{aligned}
\gamma'(\alpha+\gamma+1) &\equiv \gamma''+1+\gamma',\\
\beta\ (\alpha+\delta+1) &\equiv \beta'+1+\beta,\\
\delta\ (\alpha+\beta+1) &\equiv \delta'+1+\delta,\\
\delta\ (\beta+\gamma+1) &\equiv 1+\beta'+\delta,\\
\gamma'(\beta+\gamma+1) &\equiv \delta+1+\gamma',
\end{aligned}
$$

conclut

$$
(0.0)=(2.0),\qquad (0.1)=1.3),\qquad (0.3)=(3.1),
$$
$$
(1.0)=(1.1)=(2.1).
$$

ite de ces onze relations, le schéma S prend cette forme

$$
\begin{array}{cccc}
h & j & k & l\\
m & m & l & j\\
h & m & h & m\\
m & l & j & m.
\end{array}
$$

-1 entre dans le groupe C, donc 0 dans C′, on trouve
it de la même manière qu'au n⁰ 8

$$
h+j+k+l=\frac{\mu-1}{4}=2n+1,
$$
$$
2m+l+j=2n+1,
$$
$$
h+m=n.
$$

a considération du nombre des solutions de la congruence

$$
\alpha+\beta+\gamma+1\equiv 0
$$

core une relation entre h, j, k, l, m. Si l'on prend d'abord
tes les valeurs qui appartiennent à A, il arrive respecti

On trouve en outre, de la même manière qu'au n⁰ 9, que pou
hacun de ces cas la congruence a respectivement m, l, j, m sol
ions, de sorte que le nombre total des solutions est

$$hm + jl + kj + lm.$$

Prend-on, au contraire, d'abord pour β toutes les valeurs B, alo
l arrive respectivement m, m, l, j fois que $\beta + 1$ appartient au
roupes A, B, C, D. Pour chacun de ces cas, on trouve alors qu
a congruence a respectivement h, m, h, m solutions, ce qui donn
our le nombre total des solutions

$$mh + mm + lh + jm.$$

14. Egalons maintenant entre elles les deux expressions trouvée
our le nombre des solutions de la congruence

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \pmod{M};$$

l vient

$$0 = m^2 + lh + jm - jl - kj - lm,$$

u, à cause de la valeur $k = 2m - h$, qui résulte immédiatemen
es relations linéaires établies entre h, j, k, l, m au n⁰ 13,

$$0 = m^2 + lh + hj - jl - jm - lm.$$

A l'aide de $j + l = 1 + 2h$, on peut exprimer j et l en fonction d
eur différence, ce qui donne

$$2j = 1 + 2h + (j - l),$$
$$2l = 1 + 2h - (j - l),$$

t par l'introduction de ces valeurs dans l'équation précédente, celle-c
e transforme en

$$0 = 4m^2 - 4m - 1 + 4h^2 - 8hm + (j - l)^2,$$

u, à cause de

$$4m = 2(h + m) - 2(h - m) = 2n - 2(h - m),$$

n

$$0 = 4(h - m)^2 - 2n + 2(h - m) - 1 + (j - l)^2$$

t finalement en

$$\mu = 8n + 5 = [4(h - m) \quad 1]^2 + 4(j - l)^2;$$

$$\mathrm{A} = 4(h - m) + 1, \quad \mathrm{B} = 2j - 2l,$$
onc

$$\mu = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2.$$

moyen de A et B il est maintenant facile d'exprimer h, j, k, e la manière suivante

$$\begin{aligned} 8h &= 4n + \mathrm{A} - 1, \\ 8j &= 4n + \mathrm{A} + 2\mathrm{B} - 3, \\ 8k &= 4n - 3\mathrm{A} + 3, \\ 8l &= 4n + \mathrm{A} - 2\mathrm{B} + 3, \\ 8m &= 4n - \mathrm{A} + 1. \end{aligned}$$

e encore à déterminer A et B. Or μ, nombre premier réel orme $4n+1$, ne peut être représenté que d'une seule manière somme de deux carrés, et comme

$$\mathrm{M} = a + bi$$

$$\mu = a^2 + b^2,$$

$$a \equiv -1, \quad b \equiv 2 \pmod 4.$$

à résulte donc

$$\mathrm{A} = -a \text{ et } \mathrm{B} = \pm b.$$

igne de B s'obtient par une considération analogue à celle 2.

rouve aisément

$$\Sigma(z^2+1)^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1 \equiv 2(h-k) + 2i(j-l) \pmod{\mathrm{M}}.$$

$$2(h-k) = \mathrm{A} - 1, \quad 2(j-l) = \mathrm{B},$$

$$-1 \equiv \mathrm{A} - 1 + \mathrm{B}i,$$
$$0 \equiv \mathrm{A} + \mathrm{B}i \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{M} = a + bi).$$

u'on a déjà trouvé $\mathrm{A} = -a$, il s'ensuit $\mathrm{B} = -b$, de sorte finalement

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1, \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3, \\ 8k &= 4n + 3a + 3, \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3, \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

$\mu = 8n+1$ le schéma S est de la forme

$$\begin{array}{cccc} h & j & k & l \\ j & l & m & m \\ k & m & k & m \\ l & m & m & j \end{array}$$

Ainsi on trouve

$$\text{pour } M = -q \qquad \begin{aligned} 8h &= 4n - 3M - 5, \\ 8j = 8k = 8l &= 4n + M - 1, \\ 8m &= 4n - M + 1; \end{aligned}$$

$$\text{pour } M = a + bi \qquad \begin{aligned} 8h &= 4n - 3a - 5, \\ 8j &= 4n + a - 2b - 1, \\ 8k &= 4n + a - 1, \\ 8l &= 4n + a + 2b - 1, \\ 8m &= 4n - a + 1. \end{aligned}$$

Pour $\mu = 8n+5$, $M = a + bi$, le schéma S a la forme

$$\begin{array}{cccc} h & j & k & l \\ m & m & l & j \\ h & m & h & m \\ m & l & j & m \end{array}$$

de sorte qu'on a

$$\begin{aligned} 8h &= 4n - a - 1, \\ 8j &= 4n - a - 2b + 3, \\ 8k &= 4n + 3a + 3, \\ 8l &= 4n - a + 2b + 3, \\ 8m &= 4n + a + 1. \end{aligned}$$

Ainsi qu'il ressort de ces formules, le changement de
correspond à une permutation de j et l, tant dans le cas de μ
que lorsque $\mu = 8n+5$.

D'après les congruences du n⁰ 5, on a, dans le cas μ
pour le caractère de $1+i$ suivant le module 4

$$(3.1) + 2\,(3.2) + 3\,(3.3) = 3m + 3j \equiv -m - j,$$

et pour celui de $1-i$

$$(1.1) + 2\,(1.2) + 3\,(1.3) = l + 5m \equiv l + m,$$

donc, pour $M = -q$, il suit

$$\text{Caractère } (1+i) \equiv -n = -\frac{q^2-1}{8},$$

$$\text{Caractère } (1-i) \equiv \quad n = \quad \frac{q^2-1}{8}.$$

Or, $\frac{q+1}{4}$ et $\frac{q-3}{4}$ sont des nombres entiers consécutifs; le
duit est donc pair et $\frac{(q+1)(q-3)}{8}$ est divisible par 4, d
qu'on a

$$\frac{q^2-1}{8} \equiv \frac{q^2-1}{8} - \frac{(q+1)(q-3)}{8} = \frac{q+1}{4},$$

par conséquent

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{M-1}{4}}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{M-1}{4}},$$

et, vu que -1 est résidu biquadratique,

$$\left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{M-1}{4}}, \quad \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{-\frac{M-1}{4}},$$

tandis que, de $2 = (1-i)(1+i)$, il suit encore

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-2}{M}\right)\right) = 1.$$

Pour $M = a + bi$, au contraire, on a

$$-m - j = -n + \tfrac{1}{4}b,$$
$$l + m = \quad n + \tfrac{1}{4}b$$

et

$$n = \frac{a^2+b^2-1}{8}.$$

Mais évidemment $\frac{a-1}{4} \cdot \frac{a+3}{4}$ est pair, et par cons
$\frac{(a-1)(a+3)}{8}$ est divisible par 4, d'où il suit

$$\frac{a^2-1}{8} \equiv \frac{-a+1}{4} \pmod 4)$$

visible par 8; $\frac{b(b-4)}{8}$ est donc divisible par 4 et on a

$$\frac{b^2}{8} \equiv \frac{b^2}{8} - \frac{b(b \mp 4)}{8} = \pm \tfrac{1}{2} b,$$

de sorte que

$$n \equiv \tfrac{1}{4}(-a + 1 \pm 2b) \qquad (\text{mod } 4)$$

et finalement

$$\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1-i}{M}\right)\right) = i^{\frac{a-1-b}{4}},$$

$$\left(\left(\frac{1-i}{M}\right)\right) = \left(\left(\frac{-1+i}{M}\right)\right) = i^{\frac{-a+1-b}{4}},$$

$$\left(\left(\frac{2}{M}\right)\right) = i^{-\frac{b}{2}}.$$

Lorsque, enfin, $\mu = 8n + 5$, $M = a + bi$, on a

$$\text{Caractère } (1+i) \equiv (1.1) + 2(1.2) + 3(1.3) = m + 2l + 3j \qquad (\text{mod } 4$$

$$\text{Caractère } (1-i) \equiv (3.1) + 2(3.2) + 3(3.3) = l + 2j + 3m \qquad (\text{mod } 4$$

où, toutes les congruences ayant rapport au module 4, on a

$$m + 2l + 3j = 3n + \tfrac{1}{4}(-2a - b + 8),$$

$$l + 2j + 3m = 3n + \tfrac{1}{4}(-b + 6) \equiv -n + \tfrac{1}{4}(-b + 6),$$

$$n = \frac{a^2 + b^2 - 5}{8};$$

le produit $\frac{a-3}{4} \cdot \frac{a+1}{4}$ étant pair, $\frac{(a-3)(a+1)}{8}$ est divisible par 4

et il en est de même de $\frac{(b-2)(b+2)}{8}$; donc

$$n \equiv \frac{a^2 + b^2 - 5}{8} - \frac{(a-3)(a+1)}{8} - \frac{b^2 - 4}{8} = \tfrac{1}{4}(a+1),$$

de sorte qu'on obtient finalement

$$m + 2l + 3j \equiv \tfrac{1}{4}(a - b + 11) \equiv (a - b - 5),$$

$$l + 2j + 3m \equiv \tfrac{1}{4}(-a - b + 5),$$

par suite

$$\left(\left(\frac{1+i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{a-b-5}{4}}, \qquad \left(\left(\frac{1-i}{a+bi}\right)\right) = i^{\frac{-a-b+5}{4}}$$

$$\left(\left(\frac{-1-i}{a+bi}\right)\right)=i^{\frac{a-b+3}{4}}, \quad \left(\left(\frac{-1+i}{a+bi}\right)\right)=i^{\frac{-a-b-3}{4}},$$

$$\left(\left(\frac{2}{a+bi}\right)\right)=i^{-\frac{b}{2}}.$$

Par là se trouve déterminé, dans chaque cas, le caractère biquadratique de $1+i$, ainsi que celui de $1-i$, $-1-i$, $-1+i$, par rapport à un nombre premier primaire. Les résultats concordent entièrement avec ceux donnés par Gauss dans les art. 63, 64 de la Theoria residuorum biquadraticorum commentatio secunda et démontrés par lui, d'une manière tout à fait différente, dans les art. 68—76.

16. Relativement à l'analogie qui existe entre une grande partie des considérations précédentes et celles que Gauss a développées dans les art. 8 et suiv. de son premier mémoire sur la théorie des résidus biquadratiques, il y a à faire les remarques suivantes :

Gauss considère des nombres réels; le module premier p est de la forme $4n+1$, et il faut distinguer les deux cas $p=8n+1$, $p=8n+5$; p a donc la même signification que la norme μ dans les cas II et III de notre n⁰ 4.

Les nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$ sont partagés par Gauss en 4 classes A, B, C, D. Les nombres de ces classes étant représentés par α, β, γ, δ, cette classification est fondée sur les congruences

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv 1 \\ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv f \\ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv -1 \\ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} &\equiv -f \end{aligned}\right\} \pmod{\mu=p},$$

où $f^2\equiv -1 \pmod p$, et pour $\mu=a^2+b^2$

$$a\equiv 1 \pmod 4, \quad a+bf\equiv 0 \pmod p.$$

Pour $p=\mu=8n+1$, a et b ont la même signification que ci-dessus; pour $p=8n+5$, a et b, chez Gauss, ne diffère t que par le signe

nombre premier complexe primaire.

Lorsque, toutefois, on admet aussi des nombres complexes, i est clair que les congruences ci-dessus, qui sont relatives au mo dule $p = \mu$, restent valables pour le module $a + b i$, de sorte qu'or a aussi $a + b f \equiv 0 \pmod{a + b i}$, d'où résulte $f \equiv i \pmod{a + b i}$, et par conséquent

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -1,\ \delta^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv -i \pmod{a + b i}.$$

La classification de Gauss est donc identique à celle établie sui vant le caractère biquadratique 0, 1, 2, 3 par rapport au module $a + b i$.

Effectivement, les nombres réels $1, 2, 3, \ldots, p - 1$ forment pour le module $a + bi$ un système complet de résidus incongrus entre eux non divisibles par le module.

Aussi, en remplaçant dans les deux derniers exemples du n⁰ 5 les résidus complexes par les nombres réels congrus, ce qui se fai sans peine à l'aide de $i \equiv 27 \pmod{-3 - 8 i}$ et $i \equiv 11 \pmod{-5 + 6 i}$ on obtient

$$\pmod{-3 - 8i}, \qquad \mu = 73,$$

A	1, 2, 4, 8, 9, 16, 18, 32, 36, 37, 41, 55, 57, 64, 65, 69, 71, 72
B	5, 7, 10, 14, 17, 20, 28, 33, 34, 39, 40, 45, 53, 56, 59, 63, 66, 68
C	3, 6, 12, 19, 23, 24, 25, 27, 35, 38, 46, 48, 49, 50, 54, 61, 67, 70
D	11, 13, 15, 21, 22, 26, 29, 30, 31, 42, 43, 44, 47, 51, 52, 58, 60, 62

$$\pmod{-5 + 6i}, \qquad \mu = 61,$$

A	1, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 22, 25, 34, 42, 47, 56, 57, 58.
B	2, 7, 18, 23, 24, 26, 30, 32, 33, 40, 44, 50, 51, 53, 55.
C	3, 4, 5, 14, 19, 27, 36, 39, 41, 45, 46, 48, 49, 52, 60.
D	6, 8, 10, 11, 17, 21, 28, 29, 31, 35, 37, 38, 43, 54, 59,

en accord parfait avec les exemples donnés par Gauss dans l'art 1: de son premier mémoire.

Le cas I de notre n⁰ 4 est le seul pour lequel il n'existe rien d'analogue dans la théorie réelle de Gauss, ce qui tient à ce que dans ce cas on ne peut pas former, avec des nombres réels, un système complet de résidus.

tuée par Gauss dans son premier mémoire, est identique à celle faite d'après le caractère biquadratique par rapport au module $a+bi$ fournit aussi le moyen de déduire immédiatement tous les théorèmes que Gauss a trouvés par induction dans son second mémoire, art. 28, mais dont, à ma connaissance, aucune démonstration n'a encore été donnée jusqu'ici.

Ces théorèmes sont relatifs à la présence d'un nombre premier réel m dans les quatre classes A, B, C, D, ou, d'après ce qui précède, au caractère biquadratique de m par rapport au module $a+bi$.

17. Je vais reproduire maintenant les remarques formulées par Gauss dans l'art. 28. Le module premier $p=\mu$ étant supposé de la forme $4n+1$, il s'agit maintenant, d'après ce qui a été dit au n° précédent, de déterminer la valeur du symbole

$$\left(\left(\frac{m}{a+bi}\right)\right),$$

où m est un nombre premier réel; la circonstance que, pour $\mu=8n+5$, a et b ont chez Gauss un signe différent de celui des valeurs du n° 14, n'a aucune influence sur l'énoncé des théorèmes. Le nombre premier m recevra un signe tel qu'il soit toujours $\equiv 1 \pmod 4$, donc le signe *moins* lorsque, pris positivement, il est de la forme $4k+3=\mathrm{Q}$; quant à un nombre premier positif de la forme $4k+1$, il sera représenté par P. Les remarques de Gauss peuvent alors être exprimées de cette manière:

I. Lorsque $a\equiv 0 \pmod m$, la valeur de $\left(\left(\frac{m}{a+bi}\right)\right)$ est $+1$ ou -1; elle est égale à $+1$ si m a la forme $8r\pm 1$, égale à -1 si m a la forme $8r\pm 3$.

II. Lorsque a n'est pas divisible par m, la valeur du symbole dépend uniquement du nombre complètement déterminé x, qui satisfait à

$$b\equiv ax \pmod m.$$

Pour $m=\mathrm{P}$, x peut prendre ici les valeurs suivantes

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mathrm{P}-1$$

à l'exception des deux valeurs f et $P-f$ qui satisfont à $yy \equiv -$
(mod P). Ces deux valeurs ne peuvent évidemment pas se présente
car de $b \equiv a\,y$ il résulterait

$$b^2 \equiv -a^2 \text{ ou } a^2+b^2=p\equiv 0 \pmod{P},$$

c'est-à-dire que p devrait être divisible par P.

Pour $m=-Q$, au contraire, x peut prendre toutes les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1.$$

Ces valeurs de x peuvent être réparties en 4 classes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, d
telle sorte que, pour

$$\begin{array}{llllllll}
b\equiv a\,\alpha & \pmod{m} \text{ la} & \text{valeur} & \text{du} & \text{symbole} & \text{soit} & & =1, \\
b\equiv a\,\beta & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & =i, \\
b\equiv a\,\gamma & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & =-1, \\
b\equiv a\,\delta & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & \text{''} & =-i,
\end{array}$$

ou, ce qui revient au même, que dans ces cas m appartienne res
pectivement aux classes A, B, C, D.

Or, en ce qui concerne la quotité des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, exist
cette règle : que 3 de ces quotités sont égales, tandis que la quatrièm
est plus petite d'une unité ; d'ailleurs, cette quatrième quotité est cell
des α lorsque, pour $a\equiv 0$, m appartient à A, et celle des γ lorsqu
pour $a\equiv 0$, m appartient à C.

18. Soit donc, en premier lieu, $m=-Q$; d'après la loi de réci
procité, on a alors

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

et pour $a\equiv 0 \pmod{Q}$

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{bi}{Q}\right)\right)=\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right)\left(\left(\frac{i}{Q}\right)\right)=i^{\frac{Q^2-1}{4}},$$

vu que $\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right)=1$; en effet, on a

$$\left(\left(\frac{b}{Q}\right)\right)\equiv b^{\frac{Q^2-1}{4}} \pmod{Q}$$

et comme Q est de la forme $4r+3$, donc $\frac{Q^2-1}{4}=(Q-1)\frac{Q+}{4}$
un multiple de $Q-1$, il suit du théorème de Fermat

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=-1,$$

pour $Q=8n+7$

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=+1.$$

Lorsque, au contraire, on a $m=P=(A+Bi)(A-Bi)$ ou $A+B$ et $A-Bi$ sont les facteurs primaires de P, il suit de la loi de r ciprocité

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\right)$$

et pour $a\equiv 0 \pmod{P}$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{bi}{A-Bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{-bi}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{+bi}{A-Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right)$$

Or, en général, comme l'on sait,

$$\left(\left(\frac{\alpha+\beta i}{A+Bi}\right)\right)\left(\left(\frac{\alpha-\beta i}{A-Bi}\right)\right)=1,$$

donc

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{-1}{A+Bi}\right)\right)=(-1)^{\frac{P-1}{4}},$$

ou, pour $P=8n+1$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=1$$

et pour $P=8n+5$

$$\left(\left(\frac{P}{a+bi}\right)\right)=-1.$$

Ainsi se trouve complètement démontrée la proposition énonc au n[0] précédent, sous I.

19. Supposons maintenant que a ne soit pas divisible par m, considérons d'abord le cas le plus simple

$$m=-Q,$$

on a donc alors

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a+bi}{Q}\right)\right)$$

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{a(1+xi)}{Q}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right),$$

à cause de l'égalité $\left(\left(\frac{a}{Q}\right)\right)=1$, déjà démontrée au n⁰ précédent.

Du résultat obtenu

$$\left(\left(\frac{-Q}{a+bi}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+xi}{Q}\right)\right)$$

il ressort déjà que la valeur du symbole à gauche dépend uniquement du nombre x, lequel peut prendre les Q valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1.$$

Nous n'avons donc plus qu'à résoudre cette question: lorsque le module Q est un nombre premier de la forme $4n+3$, combien parmi les nombres

$$1,\ 1+i,\ 1+2i,\ 1+3i,\ \ldots,\ 1+(Q-1)i,$$

y en a-t-il qui appartiennent respectivement aux classes A, B, C, D?

A cet effet, je remarquerai, en premier lieu, qu'on peut prendre comme système complet de résidus non divisibles par Q, les nombres

$$\alpha+\beta i$$

où α et β parcourent les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, Q-1$, à l'exception de la combinaison $\alpha=0$, $\beta=0$; et, en second lieu, que les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1$$

appartiennent tous à A, de sorte que, lorsque le nombre

$$\alpha'+\beta' i$$

fait partie d'une certaine classe, celle-ci renferme également les nombres

$$2(\alpha'+\beta' i),\ 3(\alpha'+\beta' i),\ \ldots,\ (Q-1)(\alpha'+\beta' i)$$

qui, par l'omission de multiples de Q, peuvent tous être ramenés à la forme $\alpha+\beta i$ où α et β sont plus petits que Q. Or, les résidus de

$$\alpha',\ 2\alpha',\ 3\alpha',\ \ldots,\ (Q-1)\alpha',$$

sont, tant que α' n'est pas zéro, congrus dans un certain ordre suivant le module Q, aux nombres

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots,\ Q-1.$$

$$\alpha' + \beta' i,\ 2(\alpha' + \beta' i),\ \ldots,\ (Q-1)(\alpha' + \beta' i),$$

appartenant tous à la même classe, il y en a donc un qui est congru à un des nombres

$$1 + x i \qquad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ Q-1).$$

Or, la quotité des nombres de chaque classe,

$$\frac{Q^2 - 1}{4} = (Q-1) \times \frac{Q+1}{4},$$

est un multiple de $Q-1$, et les $Q-1$ nombres sans partie réelle

$$i,\ 2i,\ 3i,\ \ldots,\ (Q-1)i$$

appartiennent pour $Q = 8n+7$ à A, pour $Q = 8n+3$ à C.

Puisque tous les nombres de chaque classe dont la partie réelle n'est pas zéro peuvent être réunis, comme ci-dessus, en groupes de $Q-1$ nombres, de telle sorte que dans chaque groupe il y ait un nombre à partie réelle égale à 1, il en résulte que, pour $Q = 8n+7$ il y a dans les classes A, B, C, D respectivement

$$\frac{Q-3}{4}, \qquad \frac{Q+1}{4}, \qquad \frac{Q+1}{4}, \qquad \frac{Q+1}{4}$$

nombres $1 + x i$.

Pour $Q = 8n+3$, ces nombres sont

$$\frac{Q+1}{4}, \qquad \frac{Q+1}{4}, \qquad \frac{Q-3}{4}, \qquad \frac{Q+1}{4},$$

tandis que, d'après le nº 18, dans le cas $a \equiv 0 \pmod{Q}$, pour $Q = 8n+7$, et $8n+3$, Q appartenait respectivement aux classes A et C.

Tout ce qui se rapportait au cas $m = -Q$ est donc maintenant connu.

20. Pour $m = P = (A + Bi)(A - Bi)$ nous avons déjà trouvé

$$\left(\!\left(\frac{P}{a+bi}\right)\!\right) = \left(\!\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\!\right) \quad \left(\!\left(\frac{a+bi}{A-Bi}\right)\!\right)$$

et par conséquent, lorsque

$$b \equiv a x \pmod{P},$$

$$\left(\!\left(\frac{P}{a+bi}\right)\!\right) = \left(\!\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\!\right) \quad \left(\!\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\!\right) \quad \left(\!\left(\frac{a}{A+Bi}\right)\!\right) \quad \left(\!\left(\frac{a}{A-Bi}\right)\!\right)$$

deux derniers facteurs à droite est égal à 1,

$$\left(\left(\frac{P}{a+b\,i}\right)\right)=\left(\left(\frac{1+x\,i}{A+B\,i}\right)\right)\quad\left(\left(\frac{1+x\,i}{A-B\,i}\right)\right);$$

de là résulte que la valeur du symbole à gauche dépend uniquement du nombre x, de sorte qu'il n'y a plus qu'à résoudre la question suivante: pour combien de valeurs de $1+x\,i$ l'expression

$$\left(\left(\frac{1+x\,i}{A+B\,i}\right)\right)\quad\left(\left(\frac{1+x\,i}{A-B\,i}\right)\right)$$

acquiert-elle respectivement les valeurs 1, i, -1, $-i$? On doit donner ici à x les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ P-1$$

à l'exception des deux racines de $y^2 \equiv -1 \pmod{P}$.

Pour résoudre la question qui vient d'être posée, je considère un système complet de résidus incongrus non divisibles par le module $A+B\,i$, et je les rapporte, d'après leur caractère biquadratique à 4 groupes A, B, C, D. Chacun de ces résidus est supposé choisi de telle sorte que la partie réelle soit égale à 1, et que le facteur de i soit plus petit que P.

Ces suppositions peuvent être représentées ainsi

$(\mathrm{mod}\ A+B\,i)$,	$A^2+B^2=P.$
Classe A	$\alpha=1+a\,i$
B	$\beta=1+b\,i$
C	$\gamma=1+c\,i$
D	$\delta=1+d\,i$

Les nombres a, b, c, d, dans leur ensemble, concordent avec

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (P-1),$$

sauf que la valeur f, qui est $\equiv i$, manque, vu que $1+f\,i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ A+B\,i)$.

En opérant de la même manière avec $A-B\,i$, on voit aisément que la classification sera

$(\mathrm{mod}\ A-B\,i)$,	$A^2+B^2=P.$
Classe A	$1+(P-a)\,i$
B	$1+(P-d)\,i$
C	$1+(P-c)\,i$
D	$1+(P-b)\,i$

$$(1+xi)^{\frac{P-1}{4}} - i^{\rho} = (A+Bi)(C+Di),$$
$$(1-xi)^{\frac{P-1}{4}} - i^{3\rho} = (A-Bi)(C-Di).$$

Ainsi, lorsque $1+xi$ a, suivant le module $A+Bi$, le caractère ρ, $1-xi \equiv 1+(P-x)i$ a, suivant le module $A-Bi$, le caractère 3ρ.

21. Pour que

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

devienne égal à 1, il faut, lorsque

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right)$$

a l'une des valeurs 1, i, -1, $-i$, que

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right)$$

prenne une des valeurs 1, i, -1, $-i$; ou, en ayant égard aux deux divisions en classes: lorsque x appartient respectivement à a, b, c, d, il faut que, simultanément, $P-x$ appartienne aux nombres a, b, c, d.

On peut donc dire que le nombre des valeurs de x pour lesquelles on a

$$\left(\left(\frac{1+xi}{A+Bi}\right)\right) \quad \left(\left(\frac{1+xi}{A-Bi}\right)\right) = 1$$

est égal à la somme des nombres de solutions des congruences

$$\begin{aligned} a + a' &\equiv 0, \\ b + b' &\equiv 0, \\ c + c' &\equiv 0, \\ d + d' &\equiv 0, \end{aligned}$$

par rapport au module P, ou, ce qui revient au même, par rapport au module $A+Bi$.

On remarquera que la valeur $P-f$, exclue pour x, entre bien dans a, b, c, d, mais ne peut néanmoins apparaître dans aucune des congruences ci dessus, parce que cela exigerait que f se trouvât également parmi les nombres a, b, c, d, ce qui n'est pas le cas.

multiplication par i, deviennent

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\alpha'&\equiv 2\\ \beta+\beta'&\equiv 2\\ \gamma+\gamma'&\equiv 2\\ \delta+\delta'&\equiv 2\end{aligned}\right\}\ (\text{mod } \mathrm{A}+\mathrm{B}\,i).$$

Lorsque $\frac{\mathrm{P}-1}{2}$ appartient à la classe A, les congruences précédentes, multipliées par $\frac{\mathrm{P}-1}{2}$, se transforment en

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\alpha'+1&\equiv 0\\ \beta+\beta'+1&\equiv 0\\ \gamma+\gamma'+1&\equiv 0\\ \delta+\delta'+1&\equiv 0\end{aligned}\right\}\ (\text{mod } \mathrm{A}+\mathrm{B}\,i),$$

de sorte que la somme des nombres de solutions de ces congruences est égale au nombre des valeurs de x qui rendent

$$\left(\left(\frac{1+x\,i}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,i}\right)\right)\ \left(\left(\frac{1+x\,i}{\mathrm{A}-\mathrm{B}\,i}\right)\right)$$

égal à 1.

Mais on peut se convaincre immédiatement que ce résultat reste le même lorsque $\frac{\mathrm{P}-1}{2}$ appartient aux classes B, C, D. Si, par exemple, $\frac{\mathrm{P}-1}{2}$ appartient à B, il suit de $\alpha+\alpha'\equiv 2$, en multipliant par $\frac{\mathrm{P}-1}{2}$,

$$\beta+\beta'+1\equiv 0,$$

et de $\beta+\beta'\equiv\gamma+\gamma'\equiv\delta+\delta'\equiv 2$, respectivement

$$\gamma+\gamma'+1\equiv 0,\quad \delta+\delta'+1\equiv 0,\quad \alpha+\alpha'+1\equiv 0.$$

Si l'on désigne par t, u, v, w, les nombres des valeurs de x qui rendent $\left(\left(\frac{1+x\,i}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,i}\right)\right)\left(\left(\frac{1+x\,i}{\mathrm{A}-\mathrm{B}\,i}\right)\right)$ respectivement égal à $1, i, -1, -i$, t est donc la somme des nombres de solutions des congruences

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\alpha'+1&\equiv 0\\ \beta+\beta'+1&\equiv 0\\ \gamma+\gamma'+1&\equiv 0\\ \delta+\delta'+1&\equiv 0.\end{aligned}\right\}\ (\text{mod } \mathrm{A}+\mathrm{B}\,i).$$

des nombres de solutions des congruences

$$\begin{aligned} \alpha+\delta+1&\equiv 0,\\ \beta+\alpha+1&\equiv 0,\\ \gamma+\beta+1&\equiv 0,\\ \delta+\gamma+1&\equiv 0, \end{aligned}$$

tandis que, pour v et w, on a à considérer les congruences

$$\begin{aligned} \alpha+\gamma+1&\equiv 0,\\ \beta+\delta+1&\equiv 0,\\ \gamma+\alpha+1&\equiv 0,\\ \delta+\beta+1&\equiv 0, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \alpha+\beta+1&\equiv 0,\\ \beta+\gamma+1&\equiv 0,\\ \gamma+\delta+1&\equiv 0,\\ \delta+\alpha+1&\equiv 0, \end{aligned}$$

Dans le cas de $P=8n+1$ on a donc, d'après les n^0 7, 8

$$\begin{aligned} t&=(0.0)+(1.1)+(2.2)+(3.3)=h+l+k+j=2n-1,\\ u&=(0.3)+(1.0)+(2.1)+(3.2)=l+j+m+m=2n,\\ v&=(0.2)+(1.3)+(2.0)+(3.1)=k+m+k+m=2n,\\ w&=(0.1)+(1.2)+(2.3)+(3.0)=j+m+m+l=2n, \end{aligned}$$

et dans le cas de $P=8n+5$, d'après le n^0 13

$$\begin{aligned} t&=(0.2)+(1.3)+(2.0)+(3.1)=k+j+h+l=2n+1,\\ u&=(0.1)+(1.2)+(2.3)+(3.0)=j+l+m+m=2n+1,\\ v&=(0.0)+(1.1)+(2.2)+(3.3)=h+m+h+m=2n,\\ w&=(0.3)+(1.0)+(2.1)+(3.2)=l+m+m+j=2n+1. \end{aligned}$$

22. En récapitulant tout ce qui précède, on voit donc que l caractères servant à reconnaître si un nombre premier réel appartie aux classes A, B, C, D, lorsque le module P est de la forme $4n+$ et que $a+bi$ est un facteur complexe primaire de P, se laissent e primer de la manière suivante.

Le nombre premier $P=8n+1$ appartient à

$$\begin{array}{llll} \text{A pour } a\equiv 0, & b\equiv a\,\alpha & & \text{Nombre des } \alpha=2n-1,\\ \text{B} \quad ,, & b\equiv a\,\beta & (\text{mod P}). & \quad ,, \qquad ,, \quad \beta=2n,\\ \text{C} \quad ,, & b\equiv a\,\gamma & & \quad ,, \qquad ,, \quad \gamma=2n,\\ \text{D} \quad ,, & b\equiv a\,\delta & & \quad ,, \qquad ,, \quad \delta=2n. \end{array}$$

Le nombre premier $P=8n+5$ appartient à

$$\begin{array}{llll} \text{A pour } b\equiv a\,\alpha & & & \text{Nombre des } \alpha=2n+1,\\ \text{B} \quad ,, \ b\equiv a\,\beta & & (\text{mod P}). & \quad ,, \qquad ,, \quad \beta=2n+1,\\ \text{C} \quad ,, \ b\equiv a\,\gamma, & a\equiv 0 & & \quad ,, \qquad ,, \quad \gamma=2n,\\ \text{D} \quad ,, \ b\equiv a\,\delta & & & \quad ,, \qquad ,, \quad \delta=2n+1 \end{array}$$

Le nombre premier $-Q = -(8n+3)$ appartient à

A pour	$b \equiv a\alpha$		Nombre des	$\alpha = 2n+1$,
B „	$b \equiv a\beta$	(mod Q).	„ „	$\beta = 2n+1$,
C „	$b \equiv a\gamma$, $a \equiv 0$		„ „	$\gamma = 2n$,
D „	$b \equiv a\delta$		„ „	$\delta = 2n+1$.

Le nombre premier $-Q = -(8n+7)$ appartient à

A pour	$b \equiv a\alpha$, $a \equiv 0$		Nombre des	$\alpha = 2n+1$,
B „	$b \equiv a\beta$	(mod Q).	„ „	$\beta = 2n+2$,
C „	$b \equiv a\gamma$		„ „	$\gamma = 2n+2$,
D „	$b \equiv a\delta$		„ „	$\delta = 2n+2$.

Je citerai encore les remarques suivantes de Gauss (art. 28), don la démonstration, après tout ce qui précède, n'offre pas la moindr difficulté.

1. Le nombre 0 appartient toujours aux α, et les nombres $-\alpha$ $-\beta, -\gamma, -\delta$, appartiennent (mod m) respectivement aux α, δ, γ et β

2. Pour $P = 8n+1$, $Q = 8n+7$, les valeurs de $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}$ (mod m) appartiennent respectivement aux α, δ, γ, β; et pou $P = 8n+5$, $Q = 8n+3$, ces valeurs appartiennent respectivemen aux γ, β, α, δ.

RÉSIDUS CUBIQUES.

23. En passant aux résidus cubiques, il est nécessaire de rappele quelques points de la théorie des nombres entiers de la forme $a + b\varrho$ ϱ est ici une racine cubique complexe de l'unité, de sorte qu'on $1 + \varrho + \varrho^2 = 0$.

Dans cette théorie, comme on le sait, il existe au sujet de l divisibilité des nombres, de leur décomposition en facteurs premiers de l'existence de racines primitives des nombres premiers, etc., de théorèmes tout à fait analogues à ceux que présente la théori ordinaire des nombres réels; la grande majorité des recherche contenues dans les quatre premières sections des Disquisitiones arithmeticae peuvent être étendues, presque sans changement, à la théori

Le produit de deux nombres conjugués $a+b\varrho$, $a+b\varrho^2$,

$$(a+b\varrho)(a+b\varrho^2)=a^2-ab+b^2$$

s'appelle la norme du nombre $a+b\varrho$ et sera toujours indiqué par μ

Le nombre 3 n'est pas un nombre premier dans cette théorie, ca

$$3=(1-\varrho)(1-\varrho^2)=-\varrho^2(1-\varrho)^2.$$

Comme nombres premiers, outre $1-\varrho$, se présentent dans cett théorie:

premièrement les nombres premiers réels de la forme $3n-1$; l norme est alors $=(3n-1)^2$;

secondement les facteurs premiers complexes des nombres premier réels de la forme $3n+1$. Ce nombre premier réel est alors e même temps la norme du facteur premier complexe. On a, pa exemple

$$7=(2+3\varrho)(2+3\varrho^2)=(2+3\varrho)(-1-3\varrho).$$

Les nombres premiers $2+3\varrho$, $-1-3\varrho$ ont tous les deux le nombre 7 pour norme.

Dans chacun de ces deux cas la norme est donc de la forme $3k+1$

Ensuite, il suffit de considérer des nombres premiers primaires ce mot étant pris ici dans la signification que lui donne Eisenstein (Journal de Crelle, 27, p. 301), de sorte que $a+b\varrho$ sera dit primaire lorsque $a+1$ et b sont tous les deux divisibles par 3. Les nombres premiers réels de la forme $3n-1$ doivent donc être pris positifs pour être primaires.

Soit donc M un nombre premier primaire, μ la norme de la forme $3n+1$. Un système complet de résidus incongrus, non divisibles par le module M, se compose alors de $\mu-1=3n$ nombres Ces nombres peuvent être rapportés à 3 classes, comprenant chacune n nombres, suivant que leur puissance $\frac{\mu-1}{3}$ est congrue, d'après le module M, à 1, ϱ ou ϱ^2. Cette distribution peut être représentée ainsi

A	α,	α',	α'',	...
B	β,	β',	β'',	...

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1, \qquad \beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho, \qquad \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varrho^2 \pmod{M}.$$

Le caractère cubique des nombres α, α', α'', ... est 0, celui de nombres β, β', ... est 1, celui des nombres γ, γ', ... est 2.

Il sera d'ailleurs facile aussi de faire usage du symbole d'Eisenstei et d'écrire par conséquent

$$\left[\frac{\alpha}{M}\right] = 1, \quad \left[\frac{\beta}{M}\right] = \varrho, \quad \left[\frac{\gamma}{M}\right] = \varrho^2.$$

Il s'agit maintenant, en premier lieu, de déterminer le caractèr cubique de $1-\varrho$, ou la valeur du symbole $\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]$.

24. L'addition de l'unité à tous les nombres de A, B, C donn naissance aux 3 groupes de nombres A′, B′, C′

A′	$\alpha+1, \quad \alpha'+1, \quad \alpha''+1, \ldots$
B′	$\beta+1, \quad \beta'+1, \quad \beta''+1, \ldots$
C′	$\gamma+1, \quad \gamma'+1, \quad \gamma''+1, \ldots$

et je représente par (0.0), (0.1), (0.2) les quotités des nombres de A qui sont respectivement congrus à des nombres de A, B, C; pa (1.0), (1.1), (1.2) les quotités des nombres de B′ qui sont respective ment congrus à des nombres de A, B, C; enfin par (2.0), (2.1), (2.2) le quotités des nombres de C′ qui sont respectivement congrus à de nombres de A, B, C.

Tous ces nombres peuvent être réunis dans le schéma S

(0.0)	(0.1)	(0.2)
(1.0)	(1.1)	(1.2)
(2.0)	(2.1)	(2.2)

et avec la détermination de ces nombres est aussi trouvé immédia ement le caractère cubique de $1-\varrho$. Car les congruences mani estement identiques

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-1\\ (x-\beta)(x-\beta')(x-\beta'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho \qquad \pmod{M}\\ (x-\gamma)(x-\gamma')(x-\gamma'')\ldots &\equiv x^{\frac{\mu-1}{3}}-\varrho^2\end{aligned}$$

donnent pour $x = -1$, vu que $\frac{\quad}{3}$ est pair (sauf pour $M = 2$, c
qui doit être excepté)

$$\left.\begin{array}{l}(\beta+1)(\beta'+1)(\beta''+1)\ldots \equiv 1-\varrho \\ (\gamma+1)(\gamma'+1)(\gamma''+1)\ldots \equiv 1-\varrho^2\end{array}\right\} \pmod{M},$$

d'où il suit immédiatement

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right] = \varrho^{(1.1)+2(1.2)},$$

$$\left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right] = \varrho^{(2.1)+2(2.2)}.$$

25. Le nombre -1 appartient, comme cube parfait, à la class
A, et les nombres α et $-\alpha$, β et $-\beta$, γ et $-\gamma$ entrent à la fois dan
les classes A, B, C.

A l'aide de cette remarque, il est facile de voir que

le signe	représente le nombre des solutions de
(0.0)	$\alpha+\alpha'+1\equiv 0$
(0.1)	$\alpha+\beta+1\equiv 0$
(0.2)	$\alpha+\gamma+1\equiv 0$
(1.0)	$\beta+\alpha+1\equiv 0$
(1.1)	$\beta+\beta'+1\equiv 0 \pmod{M}$,
(1.2)	$\beta+\gamma+1\equiv 0$
(2.0)	$\gamma+\alpha+1\equiv 0$
(2.1)	$\gamma+\beta+1\equiv 0$
(2.2)	$\gamma+\gamma'+1\equiv 0$

de sorte qu'on a

$$(0.1) = (1.0), \quad (0.2) = (2.0), \quad (1\,2) = (2.1).$$

Si $xy = 1 \pmod{M}$ et que x appartienne à A, il est évident que y
appartient également à A; mais lorsque x appartient à B ou à C, y
appartient respectivement à C ou à B, ce qu'on peut exprimer en
écrivant

$$\alpha\alpha' \equiv 1, \quad \beta\gamma \equiv 1 \pmod{M}.$$

De

$$\gamma(\alpha+\beta+1) \equiv \gamma'+1+\gamma,$$
$$\beta(\alpha+\gamma+1) \equiv \beta'+1+\beta

$$(0.1) = (2.2), \quad (0.2) = (1.1),$$

de sorte que le schéma S a cette forme

$$\begin{matrix} h & j & k \\ j & k & l \\ k & l & j \end{matrix}$$

Comme -1 appartient à A, et par conséquent 0 à A′, mais que sauf ce nombre 0 de A′, tous les nombres de A′, B′, C′ sont congru à un nombre de A, B ou C, on a

$$h + j + k = n - 1,$$
$$j + k + l = n.$$

Enfin, la considération du nombre des solutions de la congruenc

$$\alpha + \beta + \gamma + 1 \equiv 0 \pmod{M},$$

où α, β, γ doivent être choisis respectivement dans les classes A, B, C fournit encore une relation entre h, j, k, l. En effet, si l'on prend d'abord pour α les nombres de A, on obtient pour le nombre en question

$$hl + jj + kk.$$

En prenant, au contraire, pour β successivement tous les nombre de B, on trouve pour ce même nombre

$$jk + kl + lj$$

donc

$$0 = hl + jj + kk - jk - kl - lj.$$

26. En éliminant h de cette dernière équation, à l'aide de $h = l - 1$ n a

$$0 = l(l-1) + jj + kk - jk - kl - lj,$$

équation qui, multipliée par 4, prend, à cause de

$$(j+k)^2 + 3(j-k)^2 = 4(jj + kk - jk),$$

a forme

$$0 = 4l^2 - 4l + (j+k)^2 + 3(j-k)^2 - 4l(k+j),$$

ou bien, en ayant égard à $l = n - (j+k)$ et en multipliant par 9

$$36n = 36l^2 + 9(j+k)^2 + 27(j-k)^2 - 36l(j+k) + 36(j+k);$$

en même temps on a

$$24n = 24(j+k+l)$$

donc, par soustraction,

$$12\,n = 36\,l^2 + 9\,(j+k)^2 + 27\,(j-k)^2 - 36\,l\,(j+k) + 12\,(j+k) - 24\,l,$$

ou

$$12\,n + 4 = 4\,\mu = (6\,l - 3\,j - 3\,k - 2)^2 + 27\,(j-k)^2.$$

Si l'on pose

$$A = 6\,l - 3\,j - 3\,k - 2,$$
$$B = 3\,j - 3\,k,$$

on a donc

$$4\,\mu = A^2 + 3\,B^2,$$

et h, j, k, l, se laissent alors facilement exprimer au moyen de A e
B, de la manière suivante

$$9\,h = 3\,n + A - 7,$$
$$18\,j = 6\,n - A + 3\,B - 2,$$
$$18\,k = 6\,n - A - 3\,B - 2,$$
$$9\,l = 3\,n + A + 2.$$

Il reste encore à déterminer A et B, et pour cela deux cas doiven
être distingués.

27. Si, en premier lieu, M est réel et de la forme $3\,n-1$, donc
$\mu = M^2$, il suit de

$$4\,\mu = 4\,M^2 = A^2 + 3\,B^2,$$

que A est $= \pm 2\,M$, $B = 0$. Car, si B n'était pas zéro, on pourrai
déterminer un nombre entier x de telle sorte que

$$A \equiv B\,x \pmod{M},$$

d'où résulterait

$$A^2 \equiv -3\,B^2 \equiv B^2 x^2 \pmod{M}$$

donc

$$x^2 \equiv -3 \pmod{M},$$

ce qui est impossible, puisqu'on sait que -3 est non-résidu de M
On a donc indubitablement $B = 0$, $A = \pm 2\,M$. Quant au signe
de A, il se déduit immédiatement de la remarque que A est $\equiv 1 \pmod{3}$
et M, comme nombre premier primaire, $\equiv -1 \pmod{3}$; on a donc

$$A = 2\,M$$

et finalement

$$9\,h = 3\,n + 2\,M - 7,$$
$$9\,j = 9\,k = 3\,n - M - 1,$$
$$9\,l = 3\,n + 2\,M + 2$$

naire d'un nombre premier réel p de la forme $3n+1$; on a alor

$$4\mu = (2a-b)^2 + 3b^2 = A^2 + 3B^2$$

et, puisque $a+b\varrho$ est primaire, $a+1 \equiv b \equiv 0 \pmod 3$.

B aussi est maintenant divisible par 3, et comme il est facile d démontrer que 4μ ne peut être représenté que d'une seule manièr par la somme d'un carré et du multiple par 27 d'un second carré il s'ensuit

$$A = 2a - b, \quad B = \pm b.$$

Le signe de A, en effet est de nouveau déterminé par $A \equiv 1 \pmod 3$

Quant au signe de B, il s'obtient par la considération suivante si z parcourt tous les nombres de A, B et C, on trouve, exactemen de la même manière qu'au n° 12

$$\Sigma (z^3+1)^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv -2 \equiv 3(h + j\varrho + k\varrho^2) \pmod{M},$$

ou

$$-2 \equiv 3[(h-k) + \varrho(j-k)]$$

puis, en exprimant h, j, k par A et B, et écrivant pour A la valeu $2a-b$, après quelques réductions

$$0 \equiv 2a - b + B + 2B\varrho \quad (\bmod M = a + b\varrho),$$

d'où résulte $B = b$.

A et B étant ainsi trouvés, on a

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2a - b - 7, \\ 9j &= 3n - a + 2b - 1, \\ 9k &= 3n - a - b - 1, \\ 9l &= 3n + 2a - b + 2. \end{aligned}$$

29. D'après le n° 24, le caractère cubique de $1-\varrho$ suivant l module 3 est

$$(1.1) + 2(1.2) \equiv k - l,$$

et celui de $1-\varrho^2$

$$(2.1) + 2(2.2) \equiv l - j,$$

lorsque M est réel de la forme $3n-1$, on a donc, d'après le n° 2

$$\text{Caractère } (1-\varrho) \equiv -\frac{M+1}{3},$$

$$\text{Caractère } (1-\varrho^2) \equiv +\frac{M+1}{3},$$

ou bien

$$\left[\frac{1-\varrho}{M}\right]=\varrho^{-\frac{M+1}{3}},\quad \left[\frac{1-\varrho^2}{M}\right]=\varrho^{+\frac{M+1}{3}},$$

d'où il suit encore

$$\left[\frac{3}{M}\right]=1.$$

Quand, au contraire, $M=a+b\varrho$ est un facteur complexe d'un nombre premier réel de la forme $3n+1$, on a, d'après les valeurs trouvées au n° 28

$$\text{Caractère } (1-\varrho)\equiv-\frac{a+1}{3},$$

$$\text{Caractère } (1-\varrho^2)\equiv\frac{a-b+1}{3},$$

ou

$$\left[\frac{1-\varrho}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{-\frac{a+1}{3}},\quad \left[\frac{1-\varrho^2}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{\frac{a-b+1}{3}},\quad \left[\frac{3}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{-\frac{b}{3}}.$$

Ces résultats ne diffèrent pas, au fond, de ceux donnés par Eisenstein dans le tome 28 du Journal de Crelle, p. 28 et suiv.

30. A l'égard du cas où le nombre premier M est un facteur d'un nombre premier réel p de la forme $3n+1$, je présenterai encore les remarques suivantes.

Comme, dans $M=a+b\varrho$, a et b n'ont pas de diviseur commun et que par conséquent b et $a-b$ sont aussi premiers entre eux, on peut toujours trouver deux nombres entiers α et β satisfaisant à la relation

$$b\,\alpha+(a-b)\,\beta=1$$

et on a alors

$$(a+b\varrho)(\alpha+\beta\varrho)=a\,\alpha-b\,\beta+\varrho,$$

donc

$$\varrho\equiv b\,\beta-a\,\alpha \quad (\text{mod } M=a+b\varrho).$$

De là résulte immédiatement que tout nombre entier $c+d\varrho$ est congru suivant le module $a+b\varrho$ à un nombre entier réel, lequel nombre réel peut être pris plus petit que le module $\mu=p$, de sorte que les nombres réels

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ p-1$$

réels (à l'exception de 0), suivant leur caractère cubique, classes

$$\begin{array}{llll} \text{A} & \alpha, & \alpha', & \alpha'', \dots \\ \text{B} & \beta, & \beta', & \beta'', \dots \\ \text{C} & \gamma, & \gamma', & \gamma'', \dots \end{array}$$

et en désignant par f le nombre réel qui est $\equiv \varrho \pmod{M}$, or

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1 \equiv \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f \equiv \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2 \equiv 0 \quad (\text{mod } \mathrm{M} = a + b\varrho$$

et comme

$$\alpha^{\frac{\mu-1}{3}} - 1,\ \beta^{\frac{\mu-1}{3}} - f,\ \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} - f^2$$

sont des nombres réels, ils doivent être divisibles non se par $a + b\varrho$, mais aussi par le module

$$p = \mu = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2)$$

de sorte qu'on a

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \\ \beta^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f \quad (\text{mod } p = \mu). \\ \gamma^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv f^2 \end{array}\right.$$

On voit donc que la classification des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ p-1$$

à l'aide de ces trois dernières congruences, coïncide avec c a pour base leur caractère cubique par rapport au module

Le résultat

$$\left[\frac{3}{a + b\varrho}\right] = \varrho^{-\frac{1}{3}b}$$

peut être énoncé ainsi: le nombre 3 appartient à la classe C, suivant que $-\frac{1}{3}b$ est de la forme $3m$, $3m+1$ ou $3m+$

Voici quelques exemples.

$p = 7,\quad a = 2,\quad b = 3,\quad f = 4.$ So

A	1, 6.		h	j	k
B	2, 5.		j	k	l
C	3, 4.		k	l	j

$p=13$, $a=-1$, …

A	1,	5,	8,	12.
B	4,	6,	7,	9.
C	2,	3,	10,	11.

0	2	1
2	1	1
1	1	2

$p=19$, $a=5$, $b=3$, $f=11$.

A	1,	7,	8,	11,	12,	18.
B	4,	6,	9,	10,	13,	15.
C	2,	3,	5,	14,	16,	17.

2	2	1
2	1	3
1	3	2

$p=31$, $a=5$, $b=6$, $f=25$.

A	1,	2,	4,	8,	15,	16,	23,	27,	29,	30.
B	3,	6,	7,	12,	14,	17,	19,	24,	25,	28.
C	5,	9,	10,	11,	13,	18,	20,	21,	22,	26.

3	4	2
4	2	4
2	4	4

$p=37$, $a=-4$, $b=3$, $f=26$.

A	1,	6,	8,	10,	11,	14,	23,	26,	27,	29,	31,	36.
B	2,	9,	12,	15,	16,	17,	20,	21,	22,	25,	28,	35.
C	3,	4,	5,	7,	13,	18,	19,	24,	30,	32,	33,	34.

2	5	4
5	4	3
4	3	5

$p=43$, $a=-1$, $b=6$, $f=36$.

A	1,	2,	4,	8,	11,	16,	21,	22,	27,	32,	35,	39,	41,	42.
B	3,	5,	6,	10,	12,	19,	20,	23,	24,	31,	33,	37,	38,	40.
C	7,	9,	13,	14,	15,	17,	18,	25,	26,	28,	29,	30,	34,	36.

3	6	4
6	4	4
4	4	6

$p=61$, $a=5$, $b=9$, $f=13$.

A	1,	3,	8,	9,	11,	20,	23,	24,	27,	28,	33,	34,	37,
							38,	41,	50,	52,	53,	58,	60.
B	4,	10,	12,	14,	17,	19,	25,	26,	29,	30,	31,	32,	35,
							36,	42,	44,	47,	49,	51,	57.
C	2,	5,	6,	7,	13,	15,	16,	18,	21,	22,	39,	40,	43,
							45,	46,	48,	54,	55,	56,	59.

6	8	5
8	5	7
5	7	8

La question de la présence du nombre 3 dans l'un des groupes A, B, C étant tranchée d'avance comme il vient d'être dit, on peut facilement, à l'aide de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus cubiques, établir les caractères nécessaires pour reconnaître aussi la présence d'autres nombres dans ces classes. Il suffit évidemment de considérer, à ce point de vue, les nombres premiers.

En ce qui concerne le nombre premier 2, ces caractères peuvent aussi être déduits sans le secours de la loi de réciprocité, ainsi que nous allons le faire voir.

31. Le nombre $p-1$ appartenant toujours à A, il en résult[e] [i]mmédiatement que 2 appartiendra à la classe A, B ou C suivant qu[e] $\frac{p-1}{2}$ appartient à la classe A, C ou B.

Les nombres h, k, j sont respectivement les nombres de solution[s] [d]es congruences

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \beta' + 1 &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p), \\ \gamma + \gamma' + 1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

[e]t comme ou peut échanger entre eux α et α', β et β', γ et γ', ce[s] [t]rois nombres sont pairs, à l'exception du premier, lorsque $\alpha = \alpha' = \frac{p-[1]}{2}$ [a]ppartient à A, ou à l'exception du second, lorsque $\beta = \beta' = \frac{p-[1]}{2}$ [a]ppartient à B, ou à l'exeption du troisième, lorsque $\gamma = \gamma' = \frac{p-[1]}{2}$ [a]ppartient à C.

On voit donc que 2 appartient à la classe A, B ou C, suivant que [d]es trois nombres h, j, k, le premier, le second ou le troisième es[t] [i]mpair.

Comme on a $p = 3n + 1$ (n pair) et, d'après le n⁰ 28,

$$\begin{aligned} 9h &= 3n + 2a - b - 7, \\ 9j &= 3n - a + 2b - 1, \\ 9k &= 3n - a - b - 1 \end{aligned}$$

[h] est impair lorsque b est pair, j est impair lorsque a est pair, enfi[n] [k] est impair lorsque a et b sont tous les deux impairs. Puisque [a] [e]t b n'ont pas de diviseur commun, aucun autre cas n'est possible [e]t par conséquent 2 appartient à

$$\begin{array}{lll} \text{A, lorsque} & b \equiv 0 & \\ \text{B,} \quad\ \ \text{»} & a \equiv 0 & (\mathrm{mod}\ 2). \\ \text{C,} \quad\ \ \text{»} & a \equiv b \equiv 1 & \end{array}$$

32. En ce qui regarde la présence de 5 dans l'une des trois classe[s] [o]n a, d'après la loi de réciprocité cubique,

entiers $a+b\varrho$.

Pour $a \equiv 0 \pmod 5$, on a donc

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{b\varrho}{5}\right]=\left[\frac{\varrho}{5}\right]=\varrho^8=\varrho^2;$$

et par conséquent 5 appartient à C.

Lorsque a n'est pas divisible par 5, on peut déterminer x dan

$$b \equiv a x \pmod 5,$$

et x peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4: on a

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a(1+x\varrho)}{5}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{5}\right]$$

et l'on trouve ensuite

$$x=0 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=1,$$

$$x=1 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho,$$

$$x=2 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=1,$$

$$x=3 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2,$$

$$x=4 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho.$$

de sorte que 5 appartient à

$$\begin{array}{llll} \text{A, lorsque} & b\equiv 0, & b \equiv 2a & \\ \text{B,} \quad\text{"} & b \equiv a, & b\equiv 4a & \pmod 5. \\ \text{C,} \quad\text{"} & b\equiv 3a, & a\equiv 0. & \end{array}$$

Pour juger de la classe de 7, on a

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{2+3\varrho}{a+b\varrho}\right]\left[\frac{2+3\varrho^2}{a+b\varrho}\right]$$

puis, d'après la loi de réciprocité,

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho^2}\right].$$

Pour $a\equiv 0 \pmod 7$, attendu qu'on a, en général,

$$\left[\frac{a+\beta\varrho}{a+b\varrho}\right]\left[\frac{a+\beta\varrho^2}{a+b\varrho^2}\right]=1,$$

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{\varrho}{2+3\varrho^2}\right]=\left[\frac{\varrho^2}{2+3\varrho^2}\right]=\varrho^4=\varrho,$$

de sorte que 7 appartient à B.

Lorsque a n'est pas divisible par 7, mais qu'on a

$$b\equiv a\,x \pmod 7,$$

il s'ensuit

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho^2}\right],$$

et x peut présenter les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,$$

mais non les valeurs $x=3$ et $x=5$, car celles ci rendraien

$$p=a^2-a\,b+b^2\equiv a^2(1-x+x^2)$$

divisible par 7.

On trouve maintenant

$$\begin{aligned}
x&=0 &\qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]&=1,\\
x&=1 &\qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]&=\varrho^2,\\
x&=2 &\qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]&=1,\\
x&=4 &\qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]&=\varrho,\\
x&=6 &\qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]&=\varrho^2,
\end{aligned}$$

de sorte que 7 appartient à

A, lorsque $b\equiv 0,\quad b\equiv 2\,a$

B, „ $b\equiv 4\,a,\quad a\equiv 0 \pmod 7$.

C, „ $b\equiv a,\quad b\equiv 6\,a$

De la même manière, ou par induction, on reconnaîtra

11 appartient à

A pour $b\equiv 0,\quad b\equiv 2\,a,\quad b\equiv 4\,a,\quad b\equiv 5\,a$

B „ $b\equiv 3\,a,\quad b\equiv 6\,a,\quad b\equiv 9\,a,\quad a\equiv 0 \pmod{11}$,

C „ $b\equiv a,\quad b\equiv 7\,a,\quad b\equiv 8\,a,\quad b\equiv 10\,a$

5 est aussi un nombre premier dans la théorie des nombres [ent]iers $a+b\varrho$.

[P]our $a\equiv 0 \pmod 5$, on a donc

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{b\varrho}{5}\right]=\left[\frac{\varrho}{5}\right]=\varrho^8=\varrho^2;$$

[p]ar conséquent 5 appartient à C.

[L]orsque a n'est pas divisible par 5, on peut déterminer x dans

$$b\equiv ax \pmod 5,$$

[qui] peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4: on a

$$\left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a(1+x\varrho)}{5}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{5}\right]$$

[et] on trouve ensuite

$$x=0 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=1,$$

$$x=1 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho,$$

$$x=2 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=1,$$

$$x=3 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2,$$

$$x=4 \qquad \left[\frac{5}{a+b\varrho}\right]=\varrho.$$

[de so]rte que 5 appartient à

$$\begin{array}{lll} \text{A, lorsque } b\equiv 0, & b\equiv 2a & \\ \text{B,} \quad \text{»} \quad b\equiv a, & b\equiv 4a & \pmod 5. \\ \text{C,} \quad \text{»} \quad b\equiv 3a, & a\equiv 0. & \end{array}$$

[Pou]r juger de la classe de 7, on a

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{2+3\varrho}{a+b\varrho}\right]\left[\frac{2+3\varrho^2}{a+b\varrho}\right]$$

[et] d'après la loi de réciprocité,

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{a+b\varrho}{2+3\varrho^2}\right].$$

[Pour] $a\equiv 0 \pmod 7$, attendu qu'on a, en général,

$$\left[\frac{\alpha+\beta\varrho}{a+b\varrho}\right]\left[\frac{\alpha+\beta\varrho^2}{a+b\varrho^2}\right]=1,$$

il vient

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{\varrho}{2+3\varrho^2}\right]=\left[\frac{\varrho^2}{2+3\varrho^2}\right]=\varrho^4=\varrho,$$

de sorte que 7 appartient à B.

Lorsque a n'est pas divisible par 7, mais qu'on a

$$b \equiv a\,x \pmod 7,$$

il s'ensuit

$$\left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{2+3\varrho^2}\right],$$

et x peut présenter les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6,$$

mais non les valeurs $x=3$ et $x=5$, car celles ci rendraient

$$p=a^2-a\,b+b^2\equiv a^2(1-x+x^2)$$

divisible par 7.

On trouve maintenant

$$x=0 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=1,$$

$$x=1 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2,$$

$$x=2 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=1,$$

$$x=4 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho,$$

$$x=6 \qquad \left[\frac{7}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2,$$

de sorte que 7 appartient à

A, lorsque $b\equiv 0,\quad b\equiv 2a$
B, „ $b\equiv 4a,\quad a\equiv 0 \pmod 7$.
C, „ $b\equiv a,\quad b\equiv 6a$

De la même manière, ou par induction, on reconnaîtra que

11 appartient à

A pour $b\equiv 0,\quad b\equiv 2a,\quad b\equiv 4a,\quad b\equiv 5a$
B „ $b\equiv 3a,\quad b\equiv 6a,\quad b\equiv 9a,\quad a\equiv 0 \pmod{11}$,
C „ $b\equiv a,\quad b\equiv 7a,\quad b\equiv 8a,\quad b\equiv 10a$

appartient à

ur $b = 0$, $b = 2a$, $b = 3a$, $b = 8a$
, $b = a$, $b = 6a$, $b = 11a$, $b = 12a$ (mod 13),
, $b = 5a$, $b = 7a$, $b = 9a$, $a = 0$

appartient à (mod 17),

ur $b = 0$, $b = a$, $b = 2a$, $b = 9a$, $b = 16a$, $a = 0$
, $b = 3a$, $b = 7a$, $b = 8a$, $b = 12a$, $b = 13a$, $b = 14a$
, $b = 4a$, $b = 5a$, $b = 6a$, $b = 10a$, $b = 11a$, $b = 15a$

appartient à (mod 19),

ur $b = 0$, $b = a$, $b = 2a$, $b = 10a$, $b = 18a$, $a = 0$
, $b = 5a$, $b = 11a$, $b = 13a$, $b = 14a$, $b = 16a$, $b = 17a$
, $b = 3a$, $b = 4a$, $b = 6a$, $b = 7a$, $b = 9a$, $b = 15a$

appartient à (mod 23),

ur $b = 0$, $b = 2a$, $b = 5a$, $b = 6a$, $b = 7a$, $b = 8a$, $b = 11a$, $b = 15a$
, $b = a$, $b = 9a$, $b = 13a$, $b = 16a$, $b = 17a$, $b = 18a$, $b = 19a$, $b = 22a$
, $b = 3a$, $b = 4a$, $b = 10a$, $b = 12a$, $b = 14a$, $b = 20a$, $b = 21a$, $a = 0$.

La considération de ces théorèmes particuliers donne lieu aux rques suivantes.

ur la commodité, les nombres premiers réels de la forme $3n-1$, restent aussi nombres premiers dans la théorie complexe, seront gnés ici par Q, les nombres premiers de la forme $3n+1$ par P

Un nombre premier Q appartient, lorsque $a = 0$ (mod Q), aux es A, B, C suivant que $\frac{Q+1}{3}$ est de la forme $3m$, $3m+1$, $+2$.

Un nombre premier P appartient, lorsque $a = 0$ (mod P), aux es A, B, C suivant que $\frac{P-1}{6}$ est de la forme $3m$, $3m+1$, $+2$.

Dans les cas $b = 0$, $b = 2a$, le nombre premier P ou Q appar- toujours à la classe A.

Quand le nombre premier appartient à A pour $a = 0$, il appar- aussi à A pour $b = a$ et pour $b = -a$. Si, au contraire, le bre premier fait partie de la classe B ou C lorsque $a = 0$, il fait e, pour $b = a$ et $b = -a$, de la classe C ou B.

5. En général, les critères sont de la forme suivante:

Si a est $\equiv 0$, le nombre premier appartient à une classe déterminée.

Si a n'est pas $\equiv 0$, on a $b \equiv a x$, et pour chaque valeur de x le nombre premier appartient à une classe déterminée, de sorte qu'on peut distribuer les valeurs de x en 3 groupes, tels que

pour $b \equiv a \alpha$, le nombre premier appartienne à A,
„ $b \equiv a \beta$, „ „ „ „ „ B,
„ $b \equiv a \gamma$, „ „ „ „ „ C.

Il faut encore ajouter le cas $a \equiv 0$, qui correspond aussi à une classe déterminée.

Or, le nombre total des congruences qu'on trouve de cette manière est le même pour chacune des trois classes et $= \frac{Q+1}{3}$ ou $= \frac{P-1}{3}$.

6. Lorsque x et y sont deux nombres satisfaisant à la congruence

$$x + y - xy \equiv 0,$$

et que x appartient à α, y appartient également à α. Mais si $x = \beta$ ou $= \gamma$, y appartient respectivement aux γ ou aux β.

Si $xy \equiv 1$ et que 1 appartienne aux α, on a

pour $x = \alpha'$ $\quad y = \alpha''$,
„ $x = \beta'$ $\quad y = \gamma'$,
„ $x = \gamma'$ $\quad y = \beta'$.

Si $xy \equiv 1$ et $1 = \beta$, on a

pour $x = \alpha$ $\quad y = \gamma$,
„ $x = \beta'$ $\quad y = \beta''$,
„ $x = \gamma'$ $\quad y = \alpha'$.

Si $xy \equiv 1$ et $1 = \gamma$, on a

pour $x = \alpha$ $\quad y = \beta$,
„ $x = \beta$ $\quad y = \alpha$,
„ $x = \gamma$ $\quad y = \gamma'$.

34. Quant à la démonstration de ce qui vient d'être dit, la remarque 5 est la seule qui demande quelques considérations nouvelles; tout le reste n'offre, après ce qui précède, aucune difficulté.

Je vais donc prouver d'une manière générale la vérité de cette

remarque 5. Il faut pour cela distinguer les cas où le nombre premier est $=Q$ ou $=P$; commençons par le premier de ces cas, qui est de beaucoup le plus simple.

35. Lorsque le nombre premier Q est de la forme $3n-1$, et qu'il reste par conséquent premier aussi dans la théorie des nombres complexes de la forme $a+b\varrho$, on a d'après la loi de réciprocité

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{Q}\right].$$

Soit d'abord $a\equiv 0 \pmod Q$; dans ce cas

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{b\varrho}{Q}\right]=\left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho^{\frac{Q^2-1}{3}}.$$

Mais

$$\frac{Q+1}{3}\times(Q-2)$$

est un multiple de 3 et

$$\frac{Q^2-1}{3}=\frac{(Q+1)(Q-2)}{3}\equiv\frac{Q+1}{3},$$

on a par conséquent pour $a\equiv 0 \pmod Q$,

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\varrho^{\frac{Q+1}{3}},$$

d'où ressort l'exactitude de ce qui a été dit au n° 33 en 1.

Si a n'est pas divisible par Q, x est complètement déterminé par

$$b\equiv ax \pmod Q$$

et

$$\left[\frac{Q}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a(1+x\varrho)}{Q}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right],$$

ce qui montre déjà que la classe à laquelle appartient Q dépend uniquement de x; pour x on peut d'ailleurs avoir évidemment les nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette question: parmi les Q quantités

$$\left[\frac{1+x\varrho}{Q}\right]$$
$$(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ Q-1)$$

mbien y en a-t-il d'égales à 1, combien d'égales à ϱ, combien égales à ϱ^2? Nous considérons un système complet de nombres n divisibles par le module, système pour lequel on peut prendre s nombres

$$\alpha + \beta \varrho$$
$$\left(\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} = 0, 1, 2, 3, \ldots, Q-1\right)$$

combinaison $\alpha = 0$, $\beta = 0$ devant seule être omise. Si nous rap- rtons ces $Q^2 - 1$ nombres d'après leur caractère cubique à 3 groupes , B, C,

$$\begin{array}{ll} A & \alpha_0 + \beta_0 \varrho, \ldots \\ B & \alpha_1 + \beta_1 \varrho, \ldots \\ C & \alpha_2 + \beta_2 \varrho, \ldots \end{array}$$

acun de ces groupes contient

$$\frac{Q^2 - 1}{3} = (Q-1) \times \frac{Q+1}{3}$$

mbres, quotité qui est donc un multiple de $Q - 1$: et les nombres els qui correspondent à $\beta = 0$, savoir

$$1, 2, 3, \ldots, Q-1,$$

partiennent tous à A, d'où il découle que lorsque $\alpha + \beta \varrho$ fait rtie d'une certaine classe, les nombres congrus avec

$$1(\alpha + \beta\varrho), 2(\alpha + \beta\varrho), \ldots, (Q-1)(\alpha + \beta\varrho)$$

nt aussi partie de cette classe. Si α n'est pas égal à zéro, les mbres

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, (Q-1)\alpha$$

is dans un certain ordre, sont congrus, suivant le module Q, à

$$1, 2, 3, \ldots, Q-1.$$

Les nombres d'une classe, chez qui la partie réelle n'est pas zéro, uvent donc être divisés en groupes de $Q-1$ nombres, de telle rte que dans chaque groupe se trouve un nombre de la forme $+ x\varrho$.

Il ressort de là que les quotités des nombres $1+x\varrho$ qui rendent $\left|\frac{+x\varrho}{Q}\right|$ égal à 1, ϱ ou ϱ^2, sont

$$\frac{Q-2}{3},\quad \frac{Q+1}{3},\quad \frac{Q+1}{3},\ \text{lorsque}\ \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=1,$$

$$\frac{Q+1}{3},\quad \frac{Q-2}{3},\quad \frac{Q+1}{3},\ \text{lorsque}\ \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho,$$

$$\frac{Q+1}{3},\quad \frac{Q+1}{3},\quad \frac{Q-2}{3},\ \text{lorsque}\ \left[\frac{\varrho}{Q}\right]=\varrho^2,$$

t comme, en outre, nous avons trouvé ci-dessus que, pour

$$a\equiv 0 \pmod{Q},$$

appartient aux classes A, B ou C suivant que $\left[\frac{\varrho}{Q}\right]$ est égal à 1, ϱ ϱ^2, l'énoncé 5 du n^0 33 se trouve entièrement démontré pour le as où le nombre premier est de la forme $3n-1$.

36. Lorsque le nombre premier dont on veut reconnaître la pré-ence dans les classes A, B, C est de la forme $P=3n+1$, il s'agit e déterminer la valeur de

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right];$$

n'étant pas un nombre premier dans la théorie complexe, on doit, vant de pouvoir appliquer la loi de réciprocité, décomposer P en es facteurs premiers primaires

$$P=(A+B\varrho)(A+B\varrho^2),$$

t on a alors

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{a+b\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{a+b\varrho}{A+B\varrho^2}\right].$$

Donc

pour $a\equiv 0 \pmod{P}$

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^{\frac{2(P-1)}{3}}=\varrho^{\frac{P-1}{6}},$$

pour $ax\equiv b \pmod{P}$

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right]=\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right].$$

)u premier résultat, pour $a \equiv 0$, ressort la justesse de la seconde arque du n° 33.

:omme P est de la forme $3n+1$, la congruence

$$x^3 \equiv 1 \quad (\bmod P)$$

·ois racines différentes, 1, f, g (où $f \equiv g^2$).

.es deux valeurs $-f$, $-g$ ne peuvent maintenant être égales à x la congruence

$$b \equiv a x,$$

de $b \equiv -a f$ il résulterait

$$a^2 - a b + b^2 \equiv a^2(1+f+f^2) \equiv 0 \quad (\bmod P),$$

sorte que le nombre premier

$$p = a^2 - a b + b^2$$

ıit divisible par P.

)'après cela, les valeurs que x peut prendre sont

$$0, 1, 2, 3, \ldots, P-1$$

f omission des nombres $P-f$ et $P-g$. Leur nombre est donc ·2, et il s'agit de rechercher pour combien de ces $P-2$ valeurs x l'expression

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right] \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

uiert les valeurs 1, ϱ et ϱ^2.

e fais remarquer encore que

$$\left[\frac{\varrho}{A+B\varrho}\right] = \varrho^{\frac{P-1}{3}}$$

que, pour $a \equiv 0$ $(\bmod P)$ on avait

$$\left[\frac{P}{a+b\varrho}\right] = \varrho^{\frac{2(P-1)}{3}}.$$

ıinsi, lorsque ϱ, pour le module $A+B\varrho$, appartient à la classe B ou C, il arrive simultanément que P, pour le module $a+b\varrho$ ce qui est la même chose, pour le module réel p), appartient ı classe A, C ou B.

7. Un nombre arbitraire $\alpha+\beta\varrho$ étant donné, on peut toujours ver un autre nombre qui lui soit congru suivant le module ·$B\varrho$ et dont la partie réelle soit 1.

La division d'un système complet de nombres non divisibles par module, en trois classes, d'après leur caractère cubique, peut donc re représentée de cette manière

$$\begin{array}{llll}
 & & (\mathrm{mod}\ \mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho) & \\
\mathrm{A} & \alpha=1+a\,\varrho, & \alpha'=1+a'\,\varrho, & \alpha''=1+a''\,\varrho, \ldots \\
\mathrm{B} & \beta=1+b\,\varrho, & \beta'=1+b'\,\varrho, & \beta''=1+b''\,\varrho, \ldots \\
\mathrm{C} & \gamma=1+c\,\varrho, & \gamma'=1+c'\,\varrho, & \gamma''=1+c''\,\varrho, \ldots
\end{array}$$

comme, de

$$(1+a\,\varrho)^{\frac{\mathrm{P}-1}{3}}-\varrho^{k}\equiv(\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho)(\mathrm{C}+\mathrm{D}\,\varrho)$$

suit

$$(1+a\,\varrho^{2})^{\frac{\mathrm{P}-1}{3}}-\varrho^{2k}\equiv(\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2})(\mathrm{C}+\mathrm{D}\,\varrho^{2}),$$

classification pour le module $\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2}$ peut simultanément être présentée par

$$\begin{array}{llll}
 & & (\mathrm{mod}\ \mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2}) & \\
\mathrm{A} & 1+a\,\varrho^{2}, & 1+a'\,\varrho^{2}, & 1+a''\,\varrho^{2}, \ldots \\
\mathrm{B} & 1+c\,\varrho^{2}, & 1+c'\,\varrho^{2}, & 1+c''\,\varrho^{2}, \ldots \\
\mathrm{C} & 1+b\,\varrho^{2}, & 1+b'\,\varrho^{2}, & 1+b''\,\varrho^{2}, \ldots
\end{array}$$

Les nombres a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', ... forment, dans leur emble, tous les nombres du groupe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \mathrm{P}-1,$$

l'exception du seul nombre qui est $\equiv-\varrho^{2}$ (mod $\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho$) et qui est ngru suivant le module P à un des nombres $-f$, $-g$. Les cas l'on a

$$\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho}\right]\left[\frac{1+x\,\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2}}\right]=1$$

nt évidemment

$$\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho}\right]=1 \text{ et simultanément } \left[\frac{1+x\,\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2}}\right]=1,$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho}\right]=\varrho \text{ et simultanément } \left[\frac{1+x\,\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2}}\right]=\varrho^{2},$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho}\right]=\varrho^{2} \text{ et simultanément } \left[\frac{1+x\,\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\,\varrho^{2}}\right]=\varrho.$$

Or, $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]$ est égal à 1 pour $x=a, a', a'',\ldots$, et pour qu'on ait en

ême temps $\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1$, il faut donc que $1+a\varrho$ soit congru

ivant le module $A+B\varrho^2$ à un des nombres $1+a\varrho^2$, $1+a'\varrho^2,\ldots,$

est-à dire

$$1+a\varrho \equiv 1+a'\varrho^2 \pmod{A+B\varrho^2};$$

ciproquement, s'il est satisfait à cette congruence, on a

$$\left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho}\right]=1,\quad \left[\frac{1+a\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=1.$$

e nombre des fois où ce cas se présente est donc égal au nombre

es solutions de la congruence ci-dessus. En raisonnant d'une ma-

ère analogue pour les deux autres cas

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho,\quad \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho^2$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho}\right]=\varrho^2,\quad \left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]=\varrho,$$

n trouve que le nombre des fois où

$$\left[\frac{1+x\varrho}{A+A\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{A+B\varrho^2}\right]$$

evient égal à 1, est représenté par la somme des nombres de

olutions des trois congruences

$$\begin{aligned} 1+a\varrho &\equiv 1+a'\varrho^2 \\ 1+b\varrho &\equiv 1+b'\varrho^2 \quad \pmod{A+B\varrho^2}. \\ 1+c\varrho &\equiv 1+c'\varrho^2 \end{aligned}$$

On reconnaîtra, de même, que le nombre des fois où l'expression

récédente devient égal à ϱ et à ϱ^2 est exprimé, dans le premier

as, par la somme des nombres de solutions des congruences

$$\begin{aligned} 1+b\varrho &\equiv 1+a\varrho^2 \\ 1+c\varrho &\equiv 1+b\varrho^2 \quad \pmod{A+B\varrho^2}, \\ 1+a\varrho &\equiv 1+c\varrho^2 \end{aligned}$$

et, dans le second cas, par la somme des nombres de solutions des congruences

$$\left.\begin{aligned} 1+c\,\varrho &\equiv 1+a\,\varrho^2 \\ 1+a\,\varrho &\equiv 1+b\,\varrho^2 \\ 1+b\,\varrho &\equiv 1+c\,\varrho^2 \end{aligned}\right\} \pmod{A+B\,\varrho^2}.$$

Pour pouvoir appliquer directement les développements des n^{os} 25—28, il est un peu plus facile de considérer seulement des congruences suivant le module $A+B\,\varrho$, de sorte que, remplaçant partout dans les formules précédentes ϱ par ϱ^2 et désignant par t, u, v les nombres de fois que

$$\left[\frac{1+x\,\varrho}{A+B\,\varrho}\right]\times\left[\frac{1+x\,\varrho}{A+B\,\varrho^2}\right]$$

est respectivement égal à 1, ϱ ou ϱ^2, nous écrirons:

$t =$ somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{aligned} 1+a\,\varrho^2 &\equiv 1+a'\,\varrho \\ 1+b\,\varrho^2 &\equiv 1+b'\,\varrho \\ 1+c\,\varrho^2 &\equiv 1+c'\,\varrho \end{aligned}\right\} \pmod{A+B\,\varrho},$$

$u =$ somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{aligned} 1+b\,\varrho^2 &\equiv 1+a\,\varrho \\ 1+c\,\varrho^2 &\equiv 1+b\,\varrho \\ 1+a\,\varrho^2 &\equiv 1+c\,\varrho \end{aligned}\right\} \pmod{A+B\,\varrho},$$

$v =$ somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{aligned} 1+c\,\varrho^2 &\equiv 1+a\,\varrho \\ 1+a\,\varrho^2 &\equiv 1+b\,\varrho \\ 1+b\,\varrho^2 &\equiv 1+c\,\varrho \end{aligned}\right\} \pmod{A+B\,\varrho}.$$

38. A ce sujet, il convient encore de remarquer ce qui suit. Parmi les nombres a, b, c, a', b', c' ne se trouve pas l'un des deux nombres $-f$, $-g$. Supposons que ce soit $-f$, de sorte que $-g$ s'y trouve. Il n'en est alors pas moins évident que cette valeur $-g$ ne peut se présenter nulle part dans l'une des congruences ci-dessus; car, de $1+a\,\varrho^2\equiv 1+a'\,\varrho$ ou $a\,\varrho^2=a'\,\varrho$ par exemple, il suivrait, pour $a=-g$, $a'\equiv a\,\varrho\equiv-\varrho^2\equiv-f$ (puisque $f=\varrho^2$ et $g=\varrho$ $\pmod{A+B\varrho}$); or, la valeur $a'\equiv-f$ ne se présente pas. Comme, parmi les valeurs à prendre pour x, ne se trouvaient ni $-f$ ni $-g$,

en ressort avec évidence que les expressions ci-dessus données ur t, u et v sont réellement exactes, lorsque les nombres a, a', b', c, c' qui entrent, dans les congruences, sont choisis de toutes s manières possibles dans les groupes $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots, c, c', c'', \ldots$

En introduisant, au lieu de a, b, ... les nombres $\alpha = 1 + a\varrho$, $= 1 + b\varrho$, on trouve, par exemple, que $a\varrho^2 \equiv a'\varrho$ se transforme en

$$\varrho(\alpha - 1) \equiv \alpha' - 1,$$

$$\alpha' - \varrho\alpha = 1 - \varrho,$$

en agissant de même avec les autres congruences, on obtient les pressions suivantes

= somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' - \varrho\alpha \equiv 1 - \varrho \\ \beta' - \varrho\beta \equiv 1 - \varrho \\ \gamma' - \varrho\gamma \equiv 1 - \varrho \end{array}\right\} \pmod{A + B\varrho},$$

= somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \varrho\beta \equiv 1 - \varrho \\ \beta - \varrho\gamma \equiv 1 - \varrho \\ \gamma - \varrho\alpha \equiv 1 - \varrho \end{array}\right\} \pmod{A + B\varrho},$$

= somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \varrho\gamma \equiv 1 - \varrho \\ \beta - \varrho\alpha \equiv 1 - \varrho \\ \gamma - \varrho\beta \equiv 1 - \varrho \end{array}\right\} \pmod{A + B\varrho}.$$

Dans le premier membre de ces congruences le signe $-$ peut rtout être remplacé par $+$, puisque deux nombres λ et $-\lambda$ appar nnent toujours à la même classe. Ce remplacement étant effectué, toutes les congruences étant en outre multipliées par le nombre ier,

$$\frac{P - 1}{1 - \varrho} = \frac{3n}{1 - \varrho} = n(1 - \varrho^2),$$

vient:

= somme des nombres de solutions de

$$\left.\begin{array}{l} \alpha' + \varrho\alpha + 1 \equiv 0 \\ \beta' + \varrho\beta + 1 \equiv 0 \\ \gamma' + \varrho\gamma + 1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{A + B\varrho},$$

$u =$ somme des nombres de solutions de

$$\begin{aligned} \alpha + \varrho\beta + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \varrho\gamma + 1 &\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} A + B\varrho), \\ \gamma + \varrho\alpha + 1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

$v =$ somme des nombres de solutions de

$$\begin{aligned} \alpha + \varrho\gamma + 1 &\equiv 0 \\ \beta + \varrho\alpha + 1 &\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} A + B\varrho). \\ \gamma + \varrho\beta + 1 &\equiv 0 \end{aligned}$$

On arrive à ce résultat dans chacune des trois suppositions qui peuvent être faites, à savoir, que $n(1-\varrho^2)$ fait partie de la classe A, B ou C. Cela tient évidemment à ce que les groupes de 3 congruences, qui viennent d'être trouvés, sont tels qu'ils n'éprouvent aucun changement par une permutation cyclique de α, β, γ.

Il y a maintenant trois cas à distinguer·

I. ϱ appartenant à A, ou $\left[\dfrac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = 1$.

Dans ce cas, on a $\varrho\alpha = \alpha''$, $\varrho\beta = \beta''$, $\varrho\gamma = \gamma''$, et par conséquent t, u, v sont les sommes des nombres de solutions des congruences suivantes

t	u	v
$\alpha + \alpha' + 1 \equiv 0,$	$\alpha + \beta + 1 \equiv 0,$	$\alpha + \gamma + 1 \equiv 0,$
$\beta + \beta' + 1 \equiv 0,$	$\beta + \gamma + 1 \equiv 0,$	$\beta + \alpha + 1 \equiv 0,$
$\gamma + \gamma' + 1 \equiv 0,$	$\gamma + \alpha + 1 \equiv 0,$	$\gamma + \beta + 1 \equiv 0,$

ou, d'après le n⁰ 25, si les résultats trouvés à cet endroit pour le nombre premier $a + b\varrho$ sont transportés au module $A + B\varrho$ avec la norme $3n+1$,

$$\begin{aligned} t &= h + k + j = n - 1, \\ u &= j + l + k = n, \\ v &= k + j + l = n. \end{aligned}$$

D'après le n⁰ 36, on a dans ce cas, pour $a \equiv 0$, $\left[\dfrac{P}{a + b\varrho}\right] = 1$.

II. ϱ appartient a B, ou $\left[\dfrac{\varrho}{A + B\varrho}\right] = \varrho$.

t, u, v sont alors les sommes des nombres de solutions des congruences suivantes

$$\begin{array}{c|c|c}
t & u & v \\
\alpha+\beta+1\equiv 0, & \alpha+\gamma+1\equiv 0, & \alpha+\alpha'+1\equiv 0, \\
\beta+\gamma+1\equiv 0, & \beta+\alpha+1\equiv 0, & \beta+\beta'+1\equiv 0, \\
\gamma+\alpha+1\equiv 0, & \gamma+\beta+1\equiv 0, & \gamma+\gamma'+1\equiv 0,
\end{array}$$

u bien

$$t=n,\quad u=n,\quad v=n-1.$$

D'après le n° 36, on a dans ce cas, pour $a\equiv 0$, $\left[\frac{\mathrm{P}}{a+b\varrho}\right]=\varrho^2$.

III. ϱ appartient à C, ou $\left[\frac{\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho}\right]=\varrho^2$.

u, v sont alors les sommes des nombres de solutions de

$$\begin{array}{c|c|c}
t & u & v \\
\alpha+\gamma+1\equiv 0, & \alpha+\alpha'+1\equiv 0, & \alpha+\beta+1\equiv 0, \\
\beta+\alpha+1\equiv 0, & \beta+\beta'+1\equiv 0, & \beta+\gamma+1\equiv 0, \\
\gamma+\beta+1\equiv 0, & \gamma+\gamma'+1\equiv 0, & \gamma+\alpha+1\equiv 0,
\end{array}$$

u bien

$$t=n,\quad u=n-1,\quad v=n.$$

D'après le n° 36, on a dans ce cas, pour $a\equiv 0$, $\left[\frac{\mathrm{P}}{a+b\varrho}\right]=\varrho$.

Par là se trouve démontré tout ce qui a été dit au n° 33 concernant la forme générale des caractères qui permettent de reconnaître à laquelle des trois classes appartient un nombre premier donné.

39. Quant aux autres énoncés du n° 33, il suffira de remarquer que ce qui a été dit en 6 résulte immédiatement des formules

$$\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{Q}}\right]\left[\frac{1+y\varrho}{\mathrm{Q}}\right]=\left[\frac{1-xy+(x+y-xy)\varrho}{\mathrm{Q}}\right]$$

$$\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho}\right]\left[\frac{1+x\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho^2}\right]\left[\frac{1+y\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho}\right]\left[\frac{1+y\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho^2}\right]=$$
$$=\left[\frac{1-xy+(x+y-xy)\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho}\right]\left[\frac{1-xy+(x+y-xy)\varrho}{\mathrm{A}+\mathrm{B}\varrho^2}\right].$$

la remarque, que pour $b = 2a$ le nombre premier (2, 5, 7, 11, ...)
rtient toujours à la classe A, on peut encore déduire une con
ence qu'il paraît utile de noter ici. Puisque, à cause de

$$4p = 4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$$

fait pas partie des facteurs premiers de $2a - b$, il s'ensuit que les facteurs premiers de $2a - b$ sont des résidus cubiques de p, ar conséquent $2a - b$ lui-même est résidu cubique de p.

A ce même résultat conduit aussi la considération suivante, out autre nature.

it $p = 3n + 1$ et supposons que z parcoure un système complet ombres incongrus, non divisibles par le module $a + b\rho$; de ation

$$(z^3 + 1)^{2n} = z^{6n} + \dots + \frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ n} z^{3n} + \dots + 1$$

t alors

$$\Sigma(z^3 + 1)^{2n} \equiv -2\,\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ n} \pmod{a + b\rho}.$$

ais, d'un autre côté, les nombres $z^3, \dots$ forment tous des résidus ques de $a + b\rho$, chaque résidu étant écrit 3 fois, et parmi les res $z^3 + 1$ il y en a donc $3h$ qui appartiennent à la classe A, B, $3k$ à C; par conséquent, on a aussi

$$\Sigma(z^3 + 1)^{2n} \equiv 3h + 3k\rho + 3j\rho^2 \pmod{a + b\rho},$$

l'après les valeurs du n° 28,

$$\Sigma(z^3 + 1)^{2n} \equiv a - b - 2 - b\rho.$$

en résulte

$$-2\,\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ n} \equiv a - b - b\rho \equiv 2a - b \pmod{a + b\rho},$$

rte qu'on a aussi

$$2a - b \equiv -\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \dots\ n} \pmod{p = 3n + 1}$$

uence remarquable, donnée pour la première fois par Jacobi, le Journal de Crelle, t. 2, et dont la démonstration est ordi- ment déduite de formules employées dans la théorie de la division ercle.

En écrivant cette congruence sous la forme

$$(1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n)^2 (2a - b) \equiv -1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (2n) \pmod{p},$$

et en observant que

$$\begin{aligned} 2n + 1 &\equiv -n, \\ 2n + 2 &\equiv -(n-1), \\ 2n + 3 &\equiv -(n-2), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ 3n &\equiv -1, \end{aligned}$$

que n est pair et $1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (3n) \equiv -1$, on obtient

$$(1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ n)^3 (2a - b) \equiv 1 \pmod{p},$$

d'où il ressort immédiatement que $2a - b$ est résidu cubique de p, ainsi que nous l'avions déjà trouvé ci-dessus, par une voie toute différente. Cette première démonstration nous avait appris, en outre, que tous les diviseurs de $2a - b$ sont des résidus cubiques.

XI.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 95, 1882, 901—903).

Sur un théorème de M. Tisserand.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

Soit

$$T = [(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 + (x_4 - c_4)^2]^{-1};$$

rs

$$\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_4^2} = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos u \cos x, & c_1 &= a \cos u' \cos x', \\ x_2 &= r \cos u \sin x, & c_2 &= a \cos u' \sin x', \\ x_3 &= r \sin u \cos y, & c_3 &= a \sin u' \cos y', \\ x_4 &= r \sin u \sin y, & c_4 &= a \sin u' \sin y'; \end{aligned}$$

aura

$$T = (a^2 - 2ar \cos \varphi + r^2)^{-1},$$

$$\ldots \cos \varphi = \cos u \cos u' \cos (x - x') + \sin u \sin u' \cos (y - y'),$$

par l'introduction des variables r, u, x, y, l'équation (1) se transme ainsi

$$\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \sin u \cos u \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(r \sin u \cos u \frac{\partial T}{\partial u}\right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left(r \operatorname{tang} u \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(r \cot u \frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

En développant T suivant les puissances ascendantes de r, on a

$$T = \sum_0^\infty \frac{r^n}{a^{n+2}} \frac{\sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi} = \sum_0^\infty \frac{V^{(n)} r^n}{a^{n+2}},$$

et, substituant cette valeur dans (3), on obtient l'équation différentielle uivante pour $V^{(n)} = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ considérée comme fonction de u, x, y par la substitution (2)

$$(4) \quad \frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial u^2} + \frac{1}{\cos^2 u}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{1}{\sin^2 u}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial y^2} + 2\cot 2u \frac{\partial V^{(n)}}{\partial u} + n(n+2)V^{(n)} = 0;$$

$V^{(n)}$ est une fonction entière du degré n de $\cos\varphi$, et l'on aura donc

$$(5) \quad \begin{cases} V^{(n)} = R_{0,0}^{(n)} + 2\Sigma R_{i,0}^{(n)} \cos i(x-x') \\ \qquad + 2\Sigma R_{0,k}^{(n)} \cos k(y-y') + 4\Sigma\Sigma R_{i,k}^{(n)} \cos i(x-x') \cos k(y-y'). \end{cases}$$

Il est évident que l'on n'a qu'à considérer les $R_{i,k}^{(n)}$ où $n+i+k$ est pair. Les $R_{i,k}^{(n)}$ sont des fonctions entières de $\cos u \cos u'$ et $\sin u \sin u'$, et l'on voit facilement que $R_{i,k}^{(n)}$ doit contenir le facteur $(\cos u \cos u')^i$ $(\sin u \sin u')^k$.

Maintenant, à l'aide de (4), on obtient

$$(6) \quad \frac{d^2 R_{i,k}^{(n)}}{du^2} + 2\cot 2u \frac{dR_{i,k}^{(n)}}{du} + \left[n(n+2) - \frac{i^2}{\cos^2 u} - \frac{k^2}{\sin^2 u}\right] R_{i,k}^{(n)} = 0.$$

En posant

$$R_{i,k}^{(n)} = \cos^i u \sin^k u \, S_{i.k}^{(n)},$$

$$t = \sin^2 u,$$

l'équation (6) devient

$$t(1-t)\frac{d^2 S_{i,k}^{(n)}}{dt^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)t]\frac{dS_{i,k}^{(n)}}{dt} - \alpha\beta S_{i,k}^{(n)} = 0,$$

où

$$\alpha = \frac{i+k-n}{2},$$

$$\beta = \frac{i+k+n+2}{2},$$

$$\gamma = k+1.$$

C'est l'équation de la série hypergéométrique; donc

$$S_{i,k}^{(n)} = \mathfrak{S}\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u),$$

$\mathfrak{S}$ étant indépendant de u. On voit que $S_{i,k}^{(n)}$ est une fonction entière de $\sin^2 u$, α étant un nombre entier négatif.

en conclut facilement la valeur suivante de $R^{(m)}_{i,k}$:

$$\left\{\begin{aligned} R^{(m)}_{i,k} = c^{(m)}_{i,k}(\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k \, \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u) \\ \times \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 u'), \end{aligned}\right.$$

$_k^{)}$ est une constante numérique.

otiens la valeur de $c^{(m)}_{i,k}$ en posant $u = u'$, $\sin^2 u = t$.

l'on compare alors, dans l'équation (6), les termes avec t^m, on ent au développement

$$(\cos y - \cos x)^m = \Sigma \Sigma c^{(m)}_{i,k} \cos i x \cos k y,$$

est facile d'obtenir d'une manière directe en exprimant les $c^{(m)}_{i,k}$ es intégrales définies.

l'on pose $u = u' = \frac{1}{2} J$, $x' = 0$, $y' = 0$ dans les équations (6) et (7), tombe sur la formule spéciale obtenue pour la première fois I. Tisserand (Comptes rendus, t. 88 et 89)

XII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 95, 1882, 1043—1044.)

Sur un théorème de M. Tisserand.

(Note présentée par M. Hermite.)

J'ai été conduit à la généralisation suivante de la formule donnée ans ma communication précédente.

Posons

$$
) \quad \left\{ \begin{aligned} P^{(n)}(p,x) = 2^n \frac{\Pi\left(n+\frac{p-3}{2}\right)}{\Pi(n)} \Big[x^n &- \frac{n(n-1)}{2(2n+p-3)} x^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n+p-3)(2n+p-5)} x^{n-4} - \dots \Big], \end{aligned} \right.
$$

étant un nombre entier, non négatif, p un nombre quelconque.

On a, en particulier,

$$
\begin{aligned}
P^{(n)}(1,x) &= \frac{2}{n} \cos nu, \qquad x = \cos u, \\
P^{(n)}(2,x) &= \sqrt{\pi}\, X_n, \\
P^{(n)}(3,x) &= \frac{\sin(n+1)u}{\sin u}.
\end{aligned}
$$

Je remarque que, en accord avec la définition (1), on doit prendre, ns les formules suivantes

$$
n P^{(n)}(1,x) = 1 \qquad \text{pour } n = 0.
$$

Ces polynômes ont été étudiés, sous le nom de fonctions sphériques ordre p, par M. Heine, et l'on a

$$
\frac{\Pi\left(\frac{p-3}{2}\right)}{(1-2ax+a^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \sum_0^\infty a^n P^{(n)}(p,x),
$$

$$
-\log(1-2ax+a^2) = \sum_1^\infty a^n P^{(n)}(1,x).
$$

aisons maintenant

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad X = x \cos u \cos u' + y \sin u \sin u';$$

s je dis qu'on aura

$$\begin{aligned} P^{(n)}(p, X) = \Sigma\Sigma c_{i,k} (\cos u \cos u')^i (\sin u \sin u')^k & \\ \times \mathfrak{F}\left(\frac{i+k-n}{2}, \frac{i+k+n+p-1}{2}, k+\frac{p+1}{4}, \sin^2 u\right) & \\ \times \mathfrak{F}\left(\frac{i+k-n}{2}, \frac{i+k+n+p-1}{2}, k+\frac{p+1}{4}, \sin^2 u'\right) & \\ \times P^{(i)}\left(\frac{p-1}{2}, x\right) P^{(k)}\left(\frac{p-1}{2}, y\right) & \end{aligned}$$

a sommation s'étend à toutes les valeurs entières non négatives et de k, qui rendent $n-i-k$ pair et non négatif

a valeur de la constante numérique $c_{i,k}$ est la suivante

$$c_{i,k} = \left(i+\frac{p-3}{4}\right)\left(k+\frac{p-3}{4}\right) \times \frac{\Pi\left(\frac{n-i+k}{2}+\frac{p-3}{4}\right)\Pi\left(\frac{n+i+k+p-3}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-i-k}{2}\right)\Pi\left(k+\frac{p-3}{4}\right)\Pi\left(k+\frac{p-3}{4}\right)\Pi\left(\frac{n+i-k}{2}+\frac{p-3}{4}\right)}.$$

our $p=3$, $u=u'$, on retrouve la formule de M. Tisserand.

l'on pose $u=u'=0$, tous les termes dans lesquels k n'est pas à zéro disparaissent, et l'on obtient le développement de $P^{(n)}(p, x)$ ant les polynômes $P^{(i)}\left(\frac{p-1}{2}, x\right)$.

XIII.

nsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 196—197.)

---

s van de stelling, dat eene geheele rationale functie ijd, voor zekere reëele of complexe waarden van de veranderlijke, de waarde nul aanneemt.

ɔlgende bewijs van dit fundamentaal-theorema der stelkunde, ı zooverre de hulpmiddelen der integraalrekening te hulp worden, eenige verwantschap met het derde bewijs van Verke, III, p. 59). De wijze echter, waarop de tegenspraak wordt uit de onderstelling, dat de stelling niet waar was, eheel anders.

$) = z^n + a z^{n-1} + b z^{n-2} + \dots$ eene geheele rationale functie n^{den} graad, en voor $z = x + yi$

$$f(z) = u + vi.$$

ncties u en v, die geheel rationaal in x en y zijn, hebben voor het volgende wezenlijke eigenschap, dat hoe groot een ook gegeven is, men altijd een getal R zóó groot kan be- at voor alle waarden van x en y, die aan de voorwaarde

$$x^2 + y^2 \geqq \mathrm{R}^2$$

$u^2 + v^2$ grooter dan A is.

s niet noodig bij het bewijs van deze bekende eigenschap taan; en ik merk hier alleen op, dat zij ten slotte daarop dat de „norm" van het product van twee complexe getallen aan het product der normen van de factoren, en dat dus

$$(x + yi)^n = p + qi$$

, tegelijkertijd identiek

$$(x^2 + y^2)^n = p^2 + q^2$$

Bewezen moet worden, dat er (reëele) waarden van x en y zijn, e gelijktijdig $u=0$ en $v=0$ maken

Inderdaad, bestonden er zulke waarden niet, dan zoude

$$w = \log(u^2 + v^2)$$

ne functie van x en y zijn, die de volgende eigenschappen had.

Ten eerste, w zou voor alle waarden van x en y eindig en conuu zijn, en gedeeltelijke afgeleiden naar x en y hebben van alle den, die evenzeer eindig en continu zijn voor alle waarden van en y.

Ten tweede, de functie w voldoet aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Dit laatste is duidelijk, wanneer men bedenkt, dat $\frac{1}{2}\log(u^2 + v^2)$ et reëele deel is van de functie $\log f(z)$ van de complexe veranderlijke z. laar men kan het ook direct toelichten, wanneer men bedenkt, dat

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

. Men heeft namelijk

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2\,\frac{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2} = 2\,\frac{u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}}{u^2+v^2} = 2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2\,\frac{u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}}{u^2+v^2} = 2\,\frac{-u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2} = -2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right),$$

us

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Maar voor de functien, die de eigenschappen hebben, waaraan ier w voldoet, geldt een theorema dat, — wanneer men de veranerlijken x en y meetkundig voorstelt, door de punten in een vlak, arbij de veranderlijken x en y rechthoekige coördinaten zijn, — aarin bestaat, dat de waarde van de functie in een willekeurig

unt even groot is als het gemiddelde der waarden, die de functie anneemt op den omtrek van een cirkel, waarvan dat punt het iddelpunt is. Dus scherper in eene analytische formule uitgedrukt

$$w(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x_0 + \mathrm{R}\cos\varphi,\ y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Zie bijv. Rieman's Inaug. Diss. Art. 10, Gesamm. Werke, p. 20.) laar dit voert hier blijkbaar tot eene ongerijmdheid, want men kan , altijd zoo groot aannemen, dat

$$w(x_0 + \mathrm{R}\cos\varphi,\ y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi) = \log(u^2 + v^2)$$

oor alle waarden van φ, grooter is dan een geheel willekeurig aan e nemen getal.

De onderstelling, dat er geene waarden van x en y zijn, die tegelijkertijd $u = 0$ en $v = 0$ maken, moet dus valsch zijn.

XIII.

(Amsterdam, Nieuw Arch. Wisk., 9, 1882, 196—197.)
(traduction)

Preuve du théorème, d'après lequel une fonction entière et rationnelle s'annule pour certaines valeurs réelles ou complexes de la variable.

La preuve suivante de ce théorème fondamental de l'algèbre possède uelque analogie avec la troisième démonstration de Gauss (Werke, II, p. 59); en effet, nous nous servons également du calcul intégral. Iais la façon dont la contradiction est déduite de l'hypothèse que e théorème est faux est tout autre dans cet article.

Soit $f(z)=z^n+az^{n-1}+bz^{n-2}+\ldots$ une fonction entière et rationelle du degré n, et supposons que pour $z=x+yi$ on ait

$$f(z)=u+vi.$$

Les fonctions u et v entières et rationnelles en x et y possèdent lors cette propriété qui nous sera nécessaire dans la suite que, uelque grand que soit un nombre donné A, on peut toujours éterminer un nombre R de grandeur telle que pour toutes les valeurs e x et de y qui satisfont à la condition

$$x^2+y^2 \geqq R^2,$$

expression u^2+v^2 est supérieure à A.

Il n'est pas nécessaire de nous arrêter à la démonstration de cette ropriété bien connue; je me contente de faire remarquer que la émonstration repose en dernier lieu sur ce fait que la norme du roduit de deux nombres complexes est égal au produit des normes es facteurs et que par conséquent lorsqu'on a

$$(x+yi)^n=p+qi,$$

même temps identiquement

$$(x^2+y^2)^n = p^2+q^2.$$

levons démontrer qu'il existe des valeurs (réelles) de x et de y lent simultanément u et v.

et, si de telles valeurs n'existaient pas, l'expression

$$w = \log(u^2+v^2)$$

e fonction de x et de y possédant les propriétés suivantes. emier lieu, la fonction w serait finie et continue pour toutes rs de x et de y et posséderait des dérivées partielles de tous s par rapport à x et à y, lesquelles seraient également finies ues pour toutes les valeurs de x et de y.

cond lieu, la fonction w satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

evient évident si l'on songe que la fonction $\frac{1}{2}\log(u^2+v^2)$ est réelle de la fonction $\log f(z)$ de la variable complexe z. Mais aussi le faire voir directement, car on sait que

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

et, on a

$$\frac{w}{x} = 2\,\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}}{u^2+v^2} = 2\,\frac{u\dfrac{\partial v}{\partial y}-v\dfrac{\partial u}{\partial y}}{u^2+v^2} = 2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right),$$

$$\frac{w}{y} = 2\,\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial y}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}}{u^2+v^2} = 2\,\frac{-u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial x}}{u^2+v^2} = -2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right).$$

nc

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0.$$

es fonctions possèdant les mêmes propriétés que la fonction w à un théorème qui — si l'on représente les variables x et y quement par les points d'un plan, dont x et y sont les iées rectangulaires, — consiste en ceci : la valeur d'une fonction point quelconque est égale à la moyenne des valeurs que

rend cette fonction sur une circonférence de cercle dont le point nsidéré est le centre. On peut exprimer ce théorème plus nettement par la formule analytique suivante

$$w(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x_0 + \mathrm{R}\cos\varphi,\ y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi)\, d\varphi.$$

'oir p. e. Riemann, Inaug. Diss., § 10, Gesamm. Werke, p 20.)

Mais cette relation conduit ici à une absurdité manifeste, car on eut toujours donner à R une grandeur telle que l'expression

$$w(x_0 + \mathrm{R}\cos\varphi,\ y_0 + \mathrm{R}\sin\varphi) = \log(u^2 + v^2)$$

t supérieure, pour toutes les valeurs de φ, à un nombre absolument bitraire.

L'hypothèse qu'il n'existe pas de valeurs de x et de y annulant multanément les fonctions u et v doit donc être fausse.

XIV.

(Haarlem, Arch. Néerl. Sci. Soc Holl, 18, 1883, 1—21.)

Quelques considérations sur la fonction rationnelle entière d'une variable complexe.

1. Soit $f(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \ldots + A_n$ une expression ionnelle entière en z, du degré n.

La démonstration donnée par Cauchy pour le théorème fondamen- de l'algèbre, démonstration qui à raison de sa simplicité est trée dans divers traités élémentaires (Schlömilch, Compendium r höheren Analysis; v. d. Ven, Theorie en oplossing der hoogere ıchtsvergelijkingen), revient alors à ce qui suit.

En supposant qu'il ne fût pas possible de choisir x et y de telle te que, pour $z = x + yi$, X et Y devinssent nuls simultanément ns

$$f(z) = X + Y i,$$

xpression

$$X^2 + Y^2$$

pourrait pas non plus s'annuler pour aucun système de valeurs x et y.

Il en résulterait que cette expression devrait prendre, pour au oins un système de valeurs x et y, une valeur minima positive férente de zéro. Or, cela est impossible, car on fait voir que, ls que soient a et b, à la seule condition que pour $x = a$, $y = b$ xpression $X^2 + Y^2$ ne soit pas nulle, h et k peuvent toujours être terminés de façon que, pour $x = a + h$ et $y = b + k$, $X^2 + Y^2$ re- ve une valeur moindre que pour $x = a$, $y = b$.

e la manière dont on établit ce fait, il résulte clairement aussi X^2+Y^2 ne peut pas non plus acquérir une valeur maxima, nstance qui est d'ailleurs indifférente pour la démonstration de hy.

is $\sqrt{X^2+Y^2}$ est le module de $f(z)$ et, lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont acines de l'équation $f(z)=0$, égal au produit des distances de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

s simples réflexions suffisent donc pour montrer que la propo- plus d'une fois énoncée (voir, entre autres, Comptes rendus, , p. 266), que le module de $f(z)$ prend aux points racines de ation $\frac{df(z)}{dz}=0$ une valeur maxima ou minima, doit être inexacte. re mieux en lumière les circonstances qui se produisent alors, st le but des prémières considérations qui vont être développées ns lesquelles je regarderai comme déjà prouvée la possibilité . décomposition de $f(z)$ en facteurs linéaires

primée sous une forme purement géométrique, la remarque ci-dessus peut être énoncée en ces termes: étant donnés dans lan n points fixes $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et en outre un point variable z, le it des distances de z à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne prend jamais une valeur ma ou minima, sauf lorsque le point z coïncide avec un des s $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Plusieurs des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ peuvent eurs aussi coïncider entre eux.

Dans la démonstration suivante de cette proposition, il ne sera rd aucunement question de sa relation avec la théorie des tions algébriques.

ur point de départ, je prends donc le développement en série u

$$g \sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2} = a\cos\varphi - \tfrac{1}{2}a^2\cos 2\varphi - \ldots = -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\,a^p\cos p\varphi,$$

le pour $-1 < a < +1$ et pour des valeurs quelconques de φ. développement peut servir de la manière suivante à comparer elles, en deux points voisins, les valeurs du produit des dis s de z à $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Soient B et C ces deux points, r et φ les coordonnées polaires de C par rapport à un système d'axes ayant B pour origine, R_1 et u_1 les coordonnées polaires du point racine a_1 par rapport à ce même système; on a alors

$$C\,a_1 = \sqrt{R_1^2 - 2\,R_1\,r\cos(\varphi - u_1) + r^2},$$

donc

$$\log C\,a_1 = \log R_1 + \log\sqrt{1 - 2\frac{r}{R_1}\cos(\varphi - u_1) + \frac{r^2}{R_1^2}}.$$

En supposant $r < R_1$, on a donc, d'après (1),

$$\log C\,a_1 = \log B\,a_1 - \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\,\frac{r^p}{R_1^p}\cos p\,(\varphi - u_1).$$

Si R_2, u_2; R_3, u_3; ... sont les coordonnées polaires de a_2, a_3, ... dans le système d'axes adopté, et si r est plus petit que R_2, R_3, ..., on a pareillement

$$\log C\,a_2 = \log B\,a_2 - \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\,\frac{r^p}{R_2^p}\cos p\,(\varphi - u_2)$$

$$\log C\,a_3 = \log B\,a_3 - \sum_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{p}\,\frac{r^p}{R_3^p}\cos p\,(\varphi - u_3)$$

. . . .

et par l'addition de toutes ces équations nous obtenons

$$(2) \quad . \quad . \quad \log(C\,a_1 . C\,a_2 \ldots C\,a_n) = \log(B\,a_1 . B\,a_2 \ldots B\,a_n) + \sum_{p=1}^{p=\infty} k_p\,r^p,$$

où

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad k_p = -\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{t=n}\frac{\cos p\,(\varphi - u_t)}{R_t^p}.$$

Puisque B est regardé, de même que a_1, a_2, ..., a_n, comme fixe, C seul étant supposé variable, nous pouvons réduire k_p à une forme encore plus simple en posant

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} M_p\cos\alpha_p = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{t=1}^{t=n}\frac{\cos p\,u_t}{R_t^p}, \\ M_p\sin\alpha_p = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{t=1}^{t=n}\frac{\sin p\,u_t}{R_t^p}; \end{cases}$$

I_p et a_p sont alors constants et il vient

$$(5) \quad k_p = M_p \cos (p\,\varphi - a_p),$$

onc

$$\log (C a_1 . C a_2 \ldots C a_n) = \log (B a_1 . B a_2 \ldots B a_n) + M_1 r \cos (\varphi - a_1) + M_2 r^2 \cos (2\varphi - a_2) + M_3 r^3 \cos (3\varphi - a_3) + \ldots .$$

Il doit toujours être satisfait ici à la condition que r soit moindre ue $R_1, R_2, \ldots$; en d'autres termes, le point C doit être situé à l'in- érieur du cercle qui a B pour centre et un rayon égal à la plus etite des distances $R_1, R_2, \ldots$. Dans tout ceci, il est à peine besoin e le dire, on admet que B ne coïncide pas avec l'un des points $_1, a_2, \ldots, a_n$.

En ce qui concerne les nombres positifs $M_1, M_2, M_3, \ldots$, on voit isément qu'ils ne peuvent pas tous être égaux à zéro; mais il est rès possible que quelques-uns des premiers soient nuls. Admettons ue dans la suite $M_1, M_2, \ldots, M_s$ soit le premier nombre différent e zéro, et qu'on ait par conséquent

$$(6) \quad \begin{cases} \log (C a_1 . C a_2 \ldots C a_n) = \log (B a_1 . B a_2 \ldots B a_n) + T, \\ T = M_s r^s \cos (s\varphi - a_s) + M_{s+1} r^{s+1} \cos [(s+1)\varphi - a_{s+1}] + \ldots \end{cases}$$

Nous avons maintenant à rechercher comment la valeur de T varie ec le point C, c'est-à-dire, lorsque r et φ seuls prennent d'autres aleurs.

Remarquons d'abord que la série

$$M_s r^s + M_{s+1} r^{s+1} + M_{s+2} r^{s+2} + \ldots$$

st également convergente, tant que r reste moindre que le plus etit des nombres $R_1, R_2, \ldots, R_n$; cela se déduit aisément de (4). en résulte que la série

$$s M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (s+1) M_{s+1} r - (s+2) M_{s+2} r^2 - (s+3) M_{s+3} r^3 - \ldots$$

onverge aussi pour ces valeurs de r, et comme, pour $r = 0$, cette ernière série a pour somme la valeur positive $s M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ différente e zéro, on pourra donner aussi à r une valeur, positive et différente e zéro, telle qu'on ait

$$(7) \quad s M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (s+1) M_{s+1} r - (s+2) M_{s+2} r^2 - \ldots > 0.$$

Simultanément, on a alors

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad M_s \sqrt{\tfrac{1}{2}} - M_{s+1}\, r - M_{s+2}\, r^2 - \ldots > 0.$$

Supposons maintenant qu'en (6) r reçoive une valeur positive satisfaisant aux conditions (7) et (8), et faisons alors varier φ seul, de manière à considérer des points C situés sur un cercle de rayon r décrit autour de B.

De (6), il suit

$$\frac{dT}{d\varphi} = - s\, M_s\, r^s \sin(s\varphi - a_s) - (s+1)\, M_{s+1}\, r^{s+1} \sin[(s+1)\varphi - a_{s+1}] - \ldots$$

et, par (7) et (8), on reconnaît immédiatement que, tant que la valeur absolue de $\cos(s\varphi - a_s)$ n'est pas inférieure à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, T a le même signe que $\cos(s\varphi - a_s)$. De même, tant que la valeur absolue de $\sin(s\varphi - a_s)$ n'est pas inférieure à $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{dT}{d\varphi}$ et $\sin(s\varphi - a_s)$ ont des signes contraires.

Pour obtenir toutes les valeurs de T correspondant à une valeur déterminée de r, il suffit de donner à φ, à partir d'une valeur initiale quelconque, un accroissement égal à 2π, ce qui fait croître $s\varphi - a_s$ de la quantité $2\pi s$.

Distinguons, dans cet accroissement, les $4s$ intervalles suivants

(1). $s\varphi - a_s$ de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$,

(2). $s\varphi - a_s$ de $+\frac{\pi}{4}$ à $+3.\frac{\pi}{4}$,

(3). $s\varphi - a_s$ de $+3.\frac{\pi}{4}$ à $+5.\frac{\pi}{4}$,

. . . .

enfin

(4 s). $s\varphi - a_s$ de $(8s-3)\frac{\pi}{4}$ à $(8s-1)\frac{\pi}{4}$.

Dans les premier, troisième, cinquième, ... intervalles, la valeur absolue de $\cos(s\varphi - a_s)$ est plus grande que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et alternativement positive et négative. Par conséquent, dans les premier, cinquième, neuvième, .. intervalles, T est positif; dans les troisième, septième, ... intervalles, T est négatif.

Dans les deuxième, quatrième, sixième, ... intervalles, la valeur absolue de $\sin(s\varphi - a_s)$ est plus grande que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, et alternativement

tive et négative. Par conséquent, dans les deuxième, sixième, . . intervalles, $\frac{dT}{d\varphi}$ est partout négatif, dans les quatrième, huitième, intervalles, partout positif.

Au commencement du second intervalle, T est positif pour $s\varphi - a_s = \frac{\pi}{4}$, à la fin négatif pour $s\varphi - a_s = 3\frac{\pi}{4}$, et dans tout l'intervalle $\frac{dT}{d\varphi}$ est négatif; T devient donc, dans ce second intervalle, une fois égal à zéro. A l'origine du quatrième intervalle, T est négatif, à la fin positif, et dans tout l'intervalle $\frac{dT}{d\varphi}$ est positif. T devient donc, dans le quatrième intervalle, une fois égal à zéro, etc.

Il est évident que T s'annule pour $2s$ valeurs différentes de φ, et que chaque fois il change de signe.

Or, on a $Ca_1 . Ca_2 \ldots Ca_n \lessgtr Ba_1 . Ba_2 \ldots Ba_n$, suivant que $T \lessgtr 0$; il ressort donc, de ce qui précède, qu'au voisinage du point B il y a aussi bien des points C pour lesquels $Ca_1 . Ca_2 \ldots Ca_n$ est plus grand que $Ba_1 . Ba_2 \ldots Ba_n$, que des points pour lesquels le premier produit est plus petit que le second. D'un maximum ou d'un minimum de ce produit au point B, il ne saurait donc être question. Mais le point B a été pris tout à fait arbitrairement, sauf qu'il ne devait coïncider avec aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n$; ce qui a été dit au § 3 se trouve donc démontré.

§ 4. Les conditions (7) et (8) sont de telle nature que, lorsqu'elles sont remplies par une certaine valeur positive de r, toutes les valeurs positives plus petites y satisfont également. Or, il est facile de montrer qu'en prenant r suffisamment petit, on peut faire que les valeurs de φ pour lesquelles T devient $= 0$ diffèrent aussi peu qu'on le désire des valeurs pour lesquelles $\cos(s\varphi - a_s)$ s'annule. Considérons, par exemple, la racine située dans le second intervalle pour laquelle $s\varphi - a_s$ est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $3 . \frac{\pi}{4}$, et prenons deux valeurs φ_1, φ_2, telles qu'on ait

$$s\varphi_1 - a_s < \frac{\pi}{2} < s\varphi_2 - a_s,$$

différence $\varphi_2 - \varphi_1$ pouvant d'ailleurs être aussi petite qu'on le eut.

Dans

$$T(\varphi_1) = M_s r^s \cos(s\varphi_2 - \alpha_s) + \ldots$$

premier terme est alors positif, dans

$$T(\varphi_2) = M\ r^s \cos(s\varphi_2 - \alpha_s) + \ldots$$

premier terme est négatif. On peut maintenant prendre r assez etit pour que $T(\varphi_1)$ lui-même soit positif, $T(\varphi_2)$ négatif, et pour que ela reste vrai quand r continue à décroître. Pour une pareille valeur e r, et pour toutes les valeurs plus petites, l'équation $T(\varphi) = 0$ ossède alors évidemment une racine entre φ_1 et φ_2.

On voit donc que la ligne pour laquelle $T = 0$, a en B un point ultiple d'ordre s. Les tangentes menées en B aux s branches forment itre elles des angles égaux à $\frac{\pi}{s}$. Un petit cercle, décrit autour de B, t divisé par la ligne $T = 0$ en $2s$ secteurs. A l'intérieur de chaque cteur, T conserve le même signe, et dans les secteurs successifs, est alternativement positif et négatif.

La condition $T = 0$ est équivalente à $Ca_1 . Ca_2 \ldots Ca_n = Ba_1 . Ba_2 \ldots Ba_n$.

Si le point B est choisi arbitrairement, M_1 ne sera pas, en général, ;al à zéro ; dans les considérations qui précèdent, on a alors $= 1$, et B est un point simple de la courbe $Ca_1 . Ca_2 \ldots Ca_n = a_1 . Ba_2 \ldots Ba_n$.

4. Pour découvrir la signification des conditions $M_1 = 0, M_2 = 0, \ldots$ convient de se reporter de nouveau à la théorie des équations gébriques.

A cet effet, introduisons un nouveau système d'axes rectangu- ires, où l'axe des x soit parallèle à la droite à partir de laquelle s angles sont comptés dans le système polaire, ayant pour origine dont nous nous sommes servis jusqu'ici, et où les directions des es des x et y positifs correspondent à $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$. Soient x y les coordonnées de B dans ce nouveau système, et $z = x + yi$ ie quantité variable complexe. Les points $a_1, a_2, \ldots$ peuvent alors résenter les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots$, C le nombre $z + t$, de rte que $t = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

oit enfin

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

n résulte

$$(z+t) = \log f(z) + \log\left(1 + \frac{t}{z - z_1}\right) + \log\left(1 + \frac{t}{z - z_2}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{t}{z - z_n}\right)$$

lorsque mod t est plus petit que les modules de $z - z_1$, $z - z_2$, $z - z_n$,

$$\left\{\begin{aligned} \log f(z+t) = \log f(z) + & \ t\left(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n}\right) \\ & - \tfrac{1}{2} t^2\left(\frac{1}{(z - z_1)^2} + \frac{1}{(z - z_2)^2} + \dots + \frac{1}{(z - z_n)^2}\right) \\ & + \tfrac{1}{3} t^3\left(\frac{1}{(z - z_1)^3} + \frac{1}{(z - z_2)^3} + \dots + \frac{1}{(z - z_n)^3}\right) \\ & \dots \dots \dots \dots \end{aligned}\right.$$

r on a

$$- z_1 = - R_1(\cos u_1 + i \sin u_1),\ z - z_2 = - R_2(\cos u_2 + i \sin u_2), \dots$$

l'on déduit, pour le coefficient de t^p dans (9)

$$(-1)^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{t=n} \frac{1}{(z - z_t)^p} = - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\cos p u_t - i \sin p u_t}{R_t^p}.$$

xpression à droite est, d'après (4), égale à

$$M_p(\cos a_p - i \sin a_p).$$

donc on pose encore $t = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, on obtient, en égalant elles les parties réelles des deux membres de (9)

$$\operatorname{od} f(z + t) = \log \operatorname{mod} f(z) + M_1 r \cos(\varphi - a_1) + M_2 r^2 \cos(2\varphi - a_2) + \dots$$

ui est le développement en série du n⁰ 2.

omme d'ailleurs la formule (1) résulte de

$$\log(1 - z) = - z - \tfrac{1}{2} z^2 - \tfrac{1}{3} z^3 - \dots$$

d on y pose $z = a e^{\varphi i}$ et qu'on compare les parties réelles, ce de déduction ne diffère pas essentiellement de celui qui a été é précédemment.

ais il ressort maintenant que M_1, M_2, M_3, ... sont les modules coefficients des puissances de t dans (9). Si l'on pose

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = \psi(z),$$

ent

$$\log f(z+t) = \log f(z) + \psi(z)\, t + \frac{1}{2}\psi'(z)\, t^2 + \frac{1}{2.3}\psi''(z)\, t^3 + \ldots$$

M_1, M_2, ... sont les modules de $\psi(z)$, $\frac{1}{2}\psi'(z)$, ...

r, on a

$$f'(z) = \psi(z) f(z),$$

il suit

$$f''(z) = \psi'(z) f(z) + \psi(z) f'(z),$$
$$f'''(z) = \psi''(z) f(z) + 2\psi'(z) f'(z) + \psi(z) f''(z),$$
$$f''''(z) = \psi'''(z) f(z) + 3\psi''(z) f'(z) + 3\psi'(z) f''(z) + \psi(z) f'''(z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

l'on a donc $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, ..., $M_{s-1} = 0$ et M_s non égal à zéro, , $f''(z)$, ..., $f^{(s-1)}(z)$ sont également nuls et $f^{(s)}(z)$ n'est pas nul; d'autres termes, z est une racine multiple de l'ordre $s-1$ de ation $f'(z) = 0$. Et réciproquement: lorsque z est une racine iple de l'ordre $s-1$ de $f'(z) = 0$, les quantités $M_1, M_2, \ldots, M_{s-1}$ égales à zéro et M_s n'est pas égal à zéro.

près ce qui a été dit au n⁰ 3, on voit donc maintenant que les ts multiples des courbes pour lesquelles on a $\operatorname{mod} f(z) = C$ coïn- nt avec les racines de $f'(z) = 0$; et c'est seulement pour des urs particulières de C, en nombre tout au plus égal à $n-1$, la courbe $\operatorname{mod} f(z) = C$ a de pareils points multiples. Quant à tres espèces de points singuliers, elle n'en possède pas, d'après ui a été dit au n⁰ 2.

Ce qui précède nous met en état d'obtenir une idée générale 'allure des courbes

$$\operatorname{mod} f(z) = \text{Constante}.$$

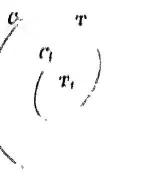
aisons d'abord quelques remarques.

Lorsque, à la limite d'un domaine (fini) continu, $\operatorname{mod} f(z)$ ne valeur constante, il faut qu'au moins une des racines $_2$, ..., a_n soit située à l'intérieur de ce domaine, et que $\operatorname{mod} f(z)$

, pour les points intérieurs au domaine une valeur plus petite · sur le contour. En effet, puisque mod $f(z)$ varie continuement, il doit prendre au moins en un point sa valeur minima en un autre point sa valeur maxima. Le minimum ne peut pas trouver au bord du domaine, car alors le maximum se trouverait intérieur, ce qui, d'après le n° 2, n'est pas possible. Les minima mbent donc en dedans du domaine et nous savons que ces minima xistent qu'aux points racines. La valeur marginale, au contraire, le maximum de mod $f(z)$, et les valeurs de mod $f(z)$ à l'intérieur domaine sont plus petites que cette valeur marginale.

De là, nous pouvons conclure:

2°. Qu'un domaine continu, à la limite duquel mod $f(z)$ est constant, est nécessairement simplement connexe.



Car si mod $f(z)$ avait, par exemple, la même valeur constante sur le contour du domaine doublement connexe T, il en résulterait, d'après ce qui précède, que, tant en T qu'en T_1, la valeur de mod $f(z)$ serait moindre qu'aux points de C_1. Or cela ne se peut pas, car, suivant le n° 2, la courbe le long de laquelle mod $f(z)$ a valeur constante forme la séparation entre un domaine dans uel mod $f(z)$ a une valeur plus petite et un autre domaine, dans uel mod $f(z)$ a une valeur plus grande.

Après tout ce qui précède, il est évident que

3°. Si nous isolons un domaine quelconque, mais entièrement ité, qui ne contienne aucune des racines, les maxima et mina de mod $f(z)$, pour ce domaine, devront être cherchés au bord domaine.

Rappelons enfin que,

4°. lorsque mod z croît indéfiniment, mod $f(z)$ finit aussi par croître -delà de toute limite.

3. Pour que le cas où l'équation $f(z)=0$ possède des racines ltiples soit également compris dans la démonstration, nous supserons que $z_1, z_2, \ldots, z_k$ soient les racines non égales de $f(z)=0$.

Si $k < n$, les autres racines, $z_{k+1}, \ldots, z_n$, ne sont donc que des répétitions de $z_1, z_2, \ldots, z_k$.

L'équation $f'(z) = 0$ a alors $k-1$ racines

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$$

dont aucune ne coïncide avec $z_1, z_2, \ldots, z_k$ et qui peuvent être re présentées par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$. Les autres racines de $f'(z) = 0$ sont en même temps racines de $f(z) = 0$. Il est très possible, toutefois, que parmi les racines $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$ il y en ait d'égales, et nous mentionnons expressément que de pareilles racines doivent être censées inscrites en (10) autant de fois que l'indique le degré de la multiplicité.

Soit, en outre,

$$\operatorname{mod} f(y_1) = c_1, \ \operatorname{mod} f(y_2) = c_2, \ \ldots, \ \operatorname{mod} f(y_{k-1}) = c_{k-1};$$

les constantes $c_1, c_2, \ldots$ sont donc positives et différentes de zéro. Comme l'ordre de succession des racines est arbitraire, nous pouvons supposer

$$c_1 \leqq c_2 \leqq c_3 \ldots \leqq c_{k-1}.$$

Il convient de remarquer encore qu'on peut avoir, par exemple, $c_1 = c_2$, sans que, pour cela $y_1 = y_2$. Si par exemple, $f(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots$ a des coefficients réels, et que y_1, y_2 soient des racines complexes, inégales, mais conjugées, de $f'(z) = 0$, on a évidemment $c_1 = c_2$.

7. Les courbes pour lesquelles on a $\operatorname{mod} f(z) = C$ seront maintenant considérées comme les limites du domaine où $\operatorname{mod} f(z)$ est moindre que C. Lorque C croît, ce domaine s'étend donc progressivement, de sorte que le domaine correspondant à une plus petite valeur de C forme toujours une partie du domaine qui appartient à une plus grande valeur de C. Pour $C = 0$, il n'y a que les k points isolés $A_1, A_2, \ldots, A_k$ qui satisfassent à la condition $\operatorname{mod} f(z) = 0$.

Il est ensuite facile de montrer que, pour des valeurs suffisamment petites de C, le domaine

$$\operatorname{mod} f(z) \leqq C$$

se compose de k aires continues, entièrement isolées les unes des autres, dont chacune renferme un des points $A_1, A_2, \ldots, A_k$, de

entourent les racines $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Décrivons en effet, autour de $A_1, A_2, \ldots, A_k$, des cercles $K_1, K_2, \ldots, K_k$ entièrement isolés les uns des autres, et soit m la valeur minima de $\operatorname{mod} f(z)$ sur la circonférence de ces cercles. Pour chaque point P en dehors de ces cercles, on a alors $\operatorname{mod} f(z) > m$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considérer le cercle K où $\operatorname{mod} z$ a une valeur constante, et qui, en même temps, satisfait aux conditions

1⁰: d'entourer le point P et tous les cercles $K_1, \ldots, K_k$,

2⁰: que le minimum de $\operatorname{mod} f(z)$ pour les points du cercle soit plus grand que m. Il est clair, d'après le n⁰ 5, qu'il existe toujours un pareil cercle.

Du n⁰ 5, 3⁰, il résulte alors que m est le minimum des valeurs de $\operatorname{mod} f(z)$ situées dans le domaine en dehors de $K_1, K_2, \ldots, K_k$ et à l'intérieur de K, de sorte que le module de $f(z)$ en P est plus grand que m.

Lorsque $C < m$, le domaine où l'on à

$$\operatorname{mod} f(z) \leqq C$$

ne contient donc aucun point situé en dehors des cercles $K_1, K_2, \ldots, K_k$. D'autre part, il est clair que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ appartiennent à ce domaine, et du n⁰ 5, 1⁰ et 2⁰, il suit donc que le domaine $\operatorname{mod} f(z) \leqq C$ est composé de k aires continues isolées, dont le contour consiste par conséquent en k courbes fermées. Aucune de ces courbes ne peut se couper elle-même.

Si C croît, chacune de ces k aires continues s'étendra, jusqu'à ce que C atteigne la valeur c_1. Supposons d'abord $c_1 < c_2$, la courbe $\operatorname{mod} f(z) = c_1$ a alors, d'après le n⁰ 2, en B_1 un point double, et les deux branches se coupent à angle droit. Décrivons autour de B_1 comme centre, avec un rayon suffisamment petit, un cercle; celui-ci sera divisé en quatre secteurs S_1, S_2, S_3, S_4.

Soit, dans les secteurs S_1, S_3, $\operatorname{mod} f(z) < c_1$, dans les secteurs S_2, S_4, $\operatorname{mod} f(z) > c_1$.

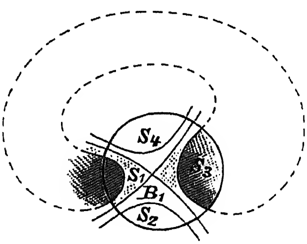
Si h est une quantité positive suffisamment petite, le domaine $\operatorname{mod} f(z) \leqq c_1 - h$ s'étendra donc dans S_1 et S_3 mais non jusqu'au point

B_1, de sorte que ces aires ne se réunissent point à l'intérieur du cercle. La courbe $\bmod f(z) = c_1 + h$, au contraire, pénètre dans S_2 et S_4, et la partie du domaine $\bmod f(z) = c_1 + h$, située à l'intérieur du cercle, est continue.

Ainsi, au moment où C dépasse la valeur c_1, deux aires séparées du domaine $\bmod f(z) \leqq C$ se réunissent. Le nombre des aires continues distinctes du domaine

$$\bmod f(z) \leqq C$$

est donc pour $C = c_1 + h$ égal à $k - 1$. Cette conclusion suppose, toutefois, que les deux aires de $\bmod f(z) \leqq c_1 - h$ qui pénètrent à l'intérieur du cercle ne s'unissent pas non plus entre elles dans leur prolongement en dehors du cercle (comme il arriverait, par exemple si ce prolongement avait lieu de la manière indiquée, dans la figure, par des lignes pointillées).



On reconnaît de suite que tel est réellement le cas, en réfléchissant que, s'il en était autrement, il en résulterait évidemment un domaine doublement connexe sur le contour duquel on aurait $\bmod f(z) = c_1 + h$, ce qui, d'après le n° 5, 2° n'est pas possible.

Si l'on a $y_1 = y_2$, de sorte que les points B_1, B_2 coïncident, on a aussi $c_1 = c_2$ et B_1 est un point triple de la courbe $\bmod f(z) = c_1$; un cercle suffisamment petit, décrit autour de B_1, est alors partagé en six secteurs, à l'intérieur desquels $\bmod f(z)$ est alternativement plus grand et plus petit que c_1.

On voit facilement que, dans ce cas, le nombre des aires distinctes du domaine $\bmod f(z) < C$ diminue de deux unités au moment où la valeur $c_1 = c_2$ est dépassée.

Il en est de même lorsqu'on a $c_1 = c_2$ sans avoir $y_1 = y_2$

Si donc on a $C < c_{k-1}$, la ligne $\operatorname{mod} f(z) = C$ consiste en une courb fermée unique, qui entoure toutes les racines. Comme règle gé nérale, on peut établir que, lorsque C n'est pas égal à l'une de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$, et que t de ces constantes sont plu grandes que C, la ligne

$$\operatorname{mod} f(z) = C$$

se compose de $t+1$ courbes fermées, isolées les unes des autres, qui ensemble, entourent toutes les racines $A_1, A_1, \ldots, A_k$.

8. Pour éclaircir ce qui précède, je choisirai l'exemple

$$f(z) = z^4 + z^3 - 2.$$

On a alors

$$z_1 = +1,$$
$$z_2 = -1.5437,$$
$$z_3 = -0.2282 + 1.1151\,i,$$
$$z_4 = -0.2282 - 1.1151\,i;$$

puis

$$f'(z) = 4z^3 + 3z^2,$$

$$y_1 = 0, \qquad c_1 = 2,$$
$$y_2 = 0, \qquad c_2 = 2,$$
$$y_3 = -\tfrac{3}{4}, \qquad c_3 = 2\tfrac{27}{256}.$$

Il s'agit maintenant de déterminer, sur les lignes

$$\operatorname{mod} f(z) = 2,$$
$$\operatorname{mod} f(z) = 2\tfrac{27}{256},$$

un nombre de points suffisants pour que leur allure se dessine clairement.

En ce qui concerne la première de ces lignes, puisque $\operatorname{mod} f(z) = 2$ on doit avoir

$$f(z) = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

J'ai donc, pour différentes valeurs de α, calculé chaque fois les quatre racines de cette équation du quatrième degré. Comme le changement de α en $-\alpha$ fait manifestement passer z à sa valeur conjuguée il suffisait de prendre α entre 0 et 180°. De cette manière ont été

des racines lorsque α approche de $180°$, il était nécessaire de calculer encore quelques autres points de la ligne $\mathrm{mod}\, f(z) = 2$; mais, pour ceux-là, il eût été moins convenable de conserver α pour argument. Aussi les valeurs données dans le tableau Iα ont elles été trouvées d'une autre manière.

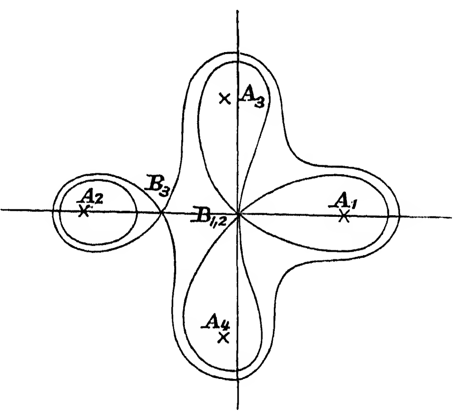
On a opéré de même pour la ligne $\mathrm{mod}\, f(z) = 2\frac{27}{256}$.

Dans le tableau II, sont indiquées les racines de l'équation

$$f(z) = 2\tfrac{27}{256}(\cos\alpha + i \sin\alpha),$$

tandis que le tableau IIα fait encore connaître quelques autres points de la ligne $\mathrm{mod}\, f(z) = 2\frac{27}{256}$.

La figure ci-contre donne une idée suffisante de la forme de ces courbes, qui, au moyen des valeurs consignées dans les tableaux, pourraient être représentées avec encore plus d'exactitude sur un dessin à échelle moins réduite.



Si l'on a $C < 2$, la ligne

$$\mathrm{mod}\, f(z) = C$$

est composée de 4 courbes fermées, entourant A_1, A_2, A_3, A_4.

Dans le cas de $2 < C < 2\frac{27}{256}$, la ligne est composée de deux courbes fermées, dont l'une entoure A_1, A_3, A_4, l'autre, A_2. Pour $C > 2\frac{27}{256}$ la ligne consiste en une seule courbe fermée, qui enveloppe tous les points A_1, A_2, A_3, A_4.

9. Considérons encore une fois, pour une valeur quelconque de C, la ligne $\mathrm{mod}\, f(z) = C$. Cette ligne se compose alors d'un certain nombre de courbes fermées

$$K_1, K_2, \ldots, K_s$$

qui n'ont pas de points communs et à l'intérieur desquelles sont situées toutes les racines $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Lors même que ces lignes, pour certaines valeurs particulières de C, auraient entre

sidère comme les limites du domaine où $\operatorname{mod} f(z)$ est $< C$, n'en serait pas moins complètement déterminé.

Désignons par $n_1, n_2, \ldots, n_s$ les nombres des racines de $f(z)=0$ qui sont situées à l'intérieur de $K_1, K_2, \ldots, K_s$, de sorte qu'on ait

$$n_1+n_2+\ldots+n_s=n,$$

les racines égales étant comptées d'après le degré de leur multiplicité.

Si maintenant la variable z parcourt la ligne entière K_1, de manière à retomber finalement sur sa valeur initiale, $f(z)$ prend des valeurs dont le module est égal à C, et pour $f(z)=C(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ l'argument φ de $f(z)$ croît de $2n_1\pi$, puisqu'à l'intérieur de K_1 il y a n_1 racines de $f(z)=0$. Il en résulte, évidemment, que l'expression $f(z)$ prend alors toutes les valeurs ayant C pour module, et qu'elle prend chacune de ces valeurs au moins n_1 fois.

Pareillement, si z parcourt la ligne K_2, l'expression $f(z)$ prend toutes les valeurs ayant C pour module, et elle prend chacune de ces valeurs au moins n_2 fois, etc

Si l'on fait donc parcourir à z successivement toutes les lignes $K_1, K_2, \ldots, K_s$, et que

$$t=C(\cos u+i\sin u)$$

soit un nombre quelconque avec C pour module, $f(z)$ prendra au moins $n_1+n_2\ldots+n_s$ fois, c'est-à-dire au moins n fois la valeur $f(z)=t$. Mais comme l'équation $f(z)=t$ n'a pas plus de n racines il est clair qu'il n'y a pas plus de n_1, mais justement n_1 racines de l'équation $f(z)=t$ situées sur la ligne K_1; de même, sur les lignes $K_2, K_3, \ldots$, se trouvent respectivement $n_2, n_3, \ldots$ racines de cette équation

On voit en outre, immédiatement, que lorsque le module de t' est plus petit que C, il y a à l'intérieur de $K_1, K_2, \ldots$ respectivement $n_1, n_2, \ldots$ points où $f(z)$ prend la valeur t'.

Le cas particulier où la ligne K_1 ne renferme qu'une seule racine, mérite d'être remarqué Si on a alors $\operatorname{mod} t' \leqq C$, il n'y a à l'intérieur de K_1 qu'un seul point où $f(z)$ prenne la valeur t', et lorsque t_1, t_2 sont deux points, non coïncidents, situés à l'intérieur de K_1, $f(t_1)$ n'est jamais égal à $f(t_2)$.

Tableau I.

Z_1		Z_2		Z_3		Z_4	
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	
+ 1.2173	0.0000	— 1.7484	0.0000	— 0.2345	+ 1.3507	— 0.2345	—
1.2157	+ 0.0299	1.7468	— 0.0286	0.2665	1.3483	0.2024	
1.2107	0.0596	1.7419	0.0569	0.2984	1.3424	0.1704	
1.2025	0.0889	1.7338	0.0848	0.3298	1.3330	0.1388	
1.1908	0.1176	1.7223	0.1121	0.3606	1.3201	0.1078	
1.1757	0.1456	1.7075	0.1386	0.3907	1.3034	0.0774	
1.1571	0.1724	1.6893	0.1639	0.4197	1.2830	0.0481	
1.1347	0.1980	1.6675	0.1878	0.4474	1.2587	— 0.0198	
1.1086	0.2221	1.6420	0.2101	0.4736	1.2301	+ 0.0070	
1.0783	0.2443	1.6125	0.2304	0.4979	1.1970	0.0321	
1.0436	0.2643	1.5789	0.2482	0.5200	1.1590	0.0553	
1.0040	0.2816	1.5405	0.2629	0.5394	1.1153	0.0760	
0.9587	0.2956	1.4969	0.2740	0.5556	1.0650	0.0938	
0.9065	0.3056	1.4471	0.2804	0.5676	1.0066	0.1082	
0.8457	0.3103	1.3896	0.2806	0.5740	0.9375	0.1180	
0.7727	0.3078	1.3219	0.2717	0.5726	0.8532	0.1218	
0.6804	0.2939	1.2389	0.2479	0.5582	0.7433	0.1168	
0.5481	0.2577	1.1295	0.1922	0.5142	0.5773	0.0957	
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

Tableau I*a*.

Z_1		Z_2		Z_3		Z_4	
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	
+ 0.5427	+ 0.2559	— 1.0733	— 0.1474	— 0.4407	+ 0.4071	+ 0.0864	—
0.4485	0.2210	1.0275	0.0913	0.3856	0.3183	0.0662	
0.3563	0.1818	1.0038	0.0342	0.3208	0.2389	0.0459	
0.2655	0.1396			0.2476	0.1694	0.0275	
0.1759	0.0952			0.1687	0.1074	0.0128	
0.0873	0.0487			0.0856	0.0516	0.0033	

Z_1		Z_2		Z_3		Z_4
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4
+ 1.2263	0.0000	— 1.7570	0.0000	— 0.2347	+ 1.3603	— 0.2347
1.2246	+ 0.0309	1.7553	— 0.0295	0.2678	1.3579	0.2015
1.2196	0.0616	1.7503	0.0588	0.3006	1.3519	0.1686
1.2111	0.0919	1.7421	0.0878	0.3331	1.3424	0.1359
1.1993	0.1216	1.7304	0.1160	0.3650	1.3292	0.1038
1.1839	0.1506	1.7153	0.1435	0.3962	1.3123	0.0724
1.1649	0.1785	1.6967	0.1698	0.4263	1.2916	0.0419
1.1422	0.2052	1.6745	0.1949	0.4552	1.2668	— 0.0125
1.1156	0.2305	1.6485	0.2183	0.4827	1.2378	+ 0.0156
1.0847	0.2539	1.6183	0.2397	0.5084	1.2041	0.0420
1.0494	0.2753	1.5839	0.2589	0.5321	1.1653	0.0667
1.0089	0.2942	1.5446	0.2751	0.5534	1.1208	0.0891
0.9625	0.3101	1.4998	0.2879	0.5716	1.0695	0.1089
0.9091	0.3224	1.4485	0.2964	0.5864	1.0099	0.1258
0.8466	0.3301	1.3890	0.2992	0.5966	0.9391	0.1390
0.7714	0.3320	1.3182	0.2941	0.6010	0.8523	0.1478
0.6756	0.3260	1.2299	0.2766	0.5972	0.7384	0.1515
0.5367	0.3097	1.1068	0.2343	0.5826	0.5632	0.1527
0.2500	0.3536	0.7500	0.0000	0.7500	0.0000	0.2500

Tableau II*a*.

Z_1		Z_2		Z_3		Z_4
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4
+ 0.4315	+ 0.3021	— 0.9832	— 0.1734	— 0.5896	+ 0.6434	+ 0.1585
0.3650	0.3063	0.8938	0.1177	0.5775	0.4846	0.1734
0.3174	0.3174	0.8326	0.0728	0.5766	0.4038	0.1959
0.2799	0.3335			0.5815	0.3357	0.2209
				0.5917	0.2759	
				0.6071	0.2209	
				0.6283	0.1684	
				0.6569	0.1158	
				0.6956	0.0609	

XV.

(Zs. Vermessgsw. Stuttgart., 15, 1886, 141—144.)

Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Pothenotischen Bestimmung [1]).

Um das Kriterium der Möglichkeit einfach darzustellen, nenne ic
as gegebene Dreieck ABC Fig. 1. und Fig. 2. und zugleich solle
ie Winkel dieses Dreiecks bezeichnet werden:

$$BAC = A, \; CBA = B, \; ACB = C,$$

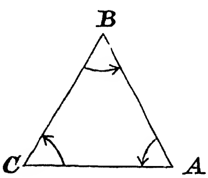


Fig. 1.

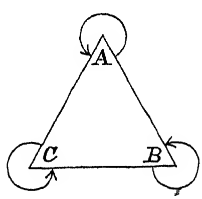


Fig. 2.

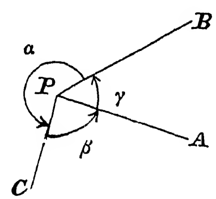


Fig. 3.

och muss noch der Drehungssinn festgesetzt werden, damit dies
Winkel eindeutig bestimmt seien. Dieser Drehungssinn für di
Winkelmessung soll so angenommen werden, wie der Sehstrahl P
eim Uebergang nach PC gedreht werden muss, ohne PA zu treffen
n diesem Sinne sei nach Fig. 3.

$$\begin{aligned} \text{Winkel } BPC &= \alpha, \\ \text{„} \quad CPA &= \beta, \\ \text{„} \quad APB &= \gamma. \end{aligned}$$

Die Winkel α, β, γ werden hiernach zwischen 0° und 360° liegen

dass sie entweder das sind, was man schlechterdings unter Winkeln eines Dreiecks versteht, so dass

$$A + B + C = 180°,$$

oder es sind A, B, C Winkel, welche, zu den gewöhnlichen Winkeln des Dreieckes addirt, jedesmal 360° geben, so dass

$$A + B + C = 900°.$$

Der erste Fall trifft dann ein, wenn der Drehungssinn der Winkel mit dem des Dreiecks ABC übereinstimmt, der zweite Fall tritt ein wenn dies nicht der Fall ist. Was hiernach unterDrehungssinn eines Dreiecks ABC zu verstehen ist, wird einleuchtend sein.

Fig. 1. hat negativen Drehungssinn, Fig. 2. hat positiven Drehungssinn. Nach diesen Festsetzungen betreffs der Winkel

$$\alpha, \beta, \gamma \qquad A, B, C$$

kann man Folgendes sagen:

Die Pothenotische Aufgabe ist physisch möglich oder unmöglich je nachdem von den drei Differenzen

$$\alpha - A, \quad \beta - B, \quad \gamma - C$$

eine *gerade* (0 oder 2) oder eine *ungerade* (1 oder 3) Anzahl *negativ* ist. Sollte *eine* der Differenzen $\alpha - A$, $\beta - B$, $\gamma - C$ Null sein, so ist die Afgabe unmöglich (selbst nach Vertauschung einer Richtung mit der entgegengesetzten), sind *zwei* Null, so ist die Aufgabe gänzlich unbestimmt, und der gesuchte Punkt kann willkürlich auf einem Bogen des um ABC beschriebenen Kreises genommen werden. (Alle drei Differenzen können nicht Null werden, da ihre Summe ja keinesfalls gleich Null ist)

Die Bestimmung der Winkel A, B, C wird zweideutig, wenn die drei Punkte ABC auf einer Geraden liegen. Nehmen wir z. B. für B den mittlern Punkt, so findet man in diesem Fall:

$$\text{entweder} \quad \begin{aligned} A &= 0°, \\ B &= 180°, \\ C &= 0°, \end{aligned} \qquad \text{oder} \quad \begin{aligned} A &= 360°, \\ B &= 180°, \\ C &= 360°, \end{aligned}$$

ntsprechend der Unbestimmtheit des Drehungssinnes des Dreieckes

ABC. Diese Zweideutigkeit hat jedoch *keinen* Einfl
gegebene Kriterium, denn man hat zu untersuchen

$$\begin{array}{lcl} \alpha, & \text{oder} & \alpha - 360^\circ, \\ \beta - 180^\circ, & & \beta - 180^\circ, \\ \gamma, & & \gamma - 360^\circ \end{array}$$

und da $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha - 360^\circ < 0$, $\gamma - 360^\circ < 0$, so fin
einen wie in dem anderen Falle immer, dass die A

$$\begin{array}{ll} \text{möglich für} & \beta > 180^\circ, \\ \text{unmöglich für} & \beta < 180^\circ \text{ ist,} \end{array}$$

wie auch leicht unmittelbar einzusehen ist.

XVI.

(Bul. Sci. Math., Paris, sér. 2, 7, 1883, 139—142.)

Sur la théorie des résidus biquadratiques.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

Vous savez que, dans son second Mémoire, Gauss à détermin[e] le caractère biquadratique du nombre $1+i$ par rapport à un nombr[e] premier M, ou, d'après Jacobi, la valeur du symbole $\left(\left(\frac{1+i}{\mathrm{M}}\right)\right)$. Cett[e] détermination se fonde sur le théorème de l'art 71, théorème ana[-]logue à celui qui sert de fondement à la troisième et à la cinquièm[e] des démonstrations de Gauss, de la loi de réciprocité pour les résidu[s] quadratiques.

Or j'ai remarqué qu'on peut obtenir la valeur de $\left(\left(\frac{1+i}{\mathrm{M}}\right)\right)$ à l'aid[e] de raisonnements complètement analogues à ceux que Gauss déve[-]loppe dans son premier Mémoire, pour obtenir le caractère d[u] nombre 2 dans la théorie réelle.

Il suffira de considérer le cas

$$\mathrm{M}=a+bi,\quad a\equiv 1\pmod 4,$$
$$b\equiv 0,\quad \mu=aa+bb=8n+1.$$

$$(\mathrm{B})\qquad \beta,\ \beta',\ \beta'',\ \ldots\ \left(\left(\frac{\beta}{\mathrm{M}}\right)\right)=i,$$

$$(\mathrm{C})\qquad \gamma,\ \gamma',\ \gamma'',\ \ldots\ \left(\left(\frac{\gamma}{\mathrm{M}}\right)\right)=-1,$$

$$(\mathrm{D})\qquad \delta,\ \delta',\ \delta'',\ \ldots\ \left(\left(\frac{\delta}{\mathrm{M}}\right)\right)=-i.$$

Alors est évident qu'on a identiquement

$$(x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\ldots\equiv x^{\frac{\mu-1}{4}}+i \pmod{\mathrm{M}},$$

d'où l'on tire, en posant $x=-1$,

$$(1+\delta)(1+\delta')(1+\delta'')\ldots\equiv 1+i \pmod{\mathrm{M}};$$

ce qui fait voir qu'il suffira de savoir combien des nombres $1+\delta$ $1+\delta'$, $1+\delta''$, ... appartiennent aux classes (A), (B), (C), (D).

Si l'on désigne maintenant par

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3)\\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3)\\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3)\\ (3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3)\end{matrix}\right.$$

combien des nombres

$$\begin{matrix} 1+\alpha, & 1+\alpha', & 1+\alpha'', & \ldots\\ 1+\beta, & 1+\beta', & 1+\beta'', & \ldots\\ 1+\gamma, & 1+\gamma', & 1+\gamma'', & \ldots\\ 1+\delta, & 1+\delta', & 1+\delta'', & \ldots\end{matrix}$$

ppartiennent à (A), (B), (C), (D), on pourra déterminer les valeur de tous ces nombres $(i,\ k)$ à l'aide des considérations employées pa Gauss dans son premier Mémoire.

Dans le cas actuel, on trouve que le tableau (S) a la forme sui vante

$$\begin{matrix} k & j & k & l\\ j & l & m & m\\ k & m & k & m\\ l & m & m & j\end{matrix}\qquad \begin{aligned} 8h&=4n-3a-5,\\ 8j&=4n+a-2b-1,\\ 8k&=4n+a-1,\\ 8l&=4n+a+2b-1,\\ 8m&=4n-a+1.\end{aligned}\qquad \left(n=\frac{aa+bb-1}{\delta}\right).$$

On a maintenant

$$\left(\left(\frac{1+i}{\mathrm{M}}\right)\right) = i^{3m+3j} = i^{-m-j} \qquad (-m-j = -n + \tfrac{1}{4}b).$$

Or (mod 4),

$$\frac{a^2-1}{\delta} \equiv \frac{-a+1}{4},$$

$$\frac{b^2}{\delta} \equiv \pm\tfrac{1}{2}b;$$

onc

$$n \equiv \tfrac{1}{4}(-a+1+2b),$$

$$-m-j = \tfrac{1}{4}(a-1-b).$$

Enfin

$$\left(\left(\frac{1+i}{\mathrm{M}}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}.$$

Les autres cas peuvent se traiter d'une manière analogue.

La même méthode réussit pour déterminer le caractère cubique e $1-\varrho$, et encore pour trouver les théorèmes sur le nombre 2 ans la théorie des résidus quadratiques. Dans ce dernier cas, après voir déterminé les nombres (i, k), il n'est pas nécessaire de recourir ces congruences identiques, comme plus haut celle-ci

$$(x-\delta)(x-\delta')(x-\delta'')\ldots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{M}).$$

Mais on arrive au but par une considération arithmétique, qui e diffère pas de celle que Gauss a employée dans son premier Iémoire pour le nombre 2, dans la théorie des résidus biquadraques. On a, de cette manière, une démonstration assez simple et urement arithmétique de ces théorèmes

$$\left(\frac{2}{p}\right) = +1, \quad p = 8n \pm 1,$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1, \quad p = 8n \pm 3.$$

XVII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 96, 1883, 764–766)

Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier.

(Note présentée par M. Hermite.)

Désignons par $f(n)$ le nombre des diviseurs de n; nous allons faire voir qu'on a alors

$$(1) \quad \ldots\ldots \lim_{n=\infty}\left[\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}-\log n\right]=\mathrm{A}.$$

A est une constante égale à $-1-2\Gamma'(1)$; sa valeur numérique est

$$\mathrm{A}=0{,}154431329803\ldots,$$

Voici quelques valeurs de la fonction qui figure dans le premier membre de la formule (1)

$$n=100, \qquad \mathrm{A}=0{,}2148\ldots\ldots\ldots,$$
$$n=1000, \qquad \mathrm{A}=0{,}161245\ldots\ldots\ldots,$$
$$n=100000, \qquad \mathrm{A}=0{,}154574535\ldots.$$

En considérant l'ensemble des nombres $1, 2, \ldots, n$ avec leurs diviseurs, on voit facilement que le nombre de fois que $p \leqq n$ y figure est $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right)$; donc

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\sum_{p=1}^{p=n}\mathrm{E}\left(\frac{n}{p}\right).$$

Nommons $r_1, r_2, r_3, \ldots$ les restes que l'on obtient en divisant n

$$\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n}-\log n=\sum_1^n\frac{1}{p}-\log n-\sum_1^n\frac{r_p}{n(n-p+$$

Or on sait que

$$\lim_{n=\infty}\sum_1^n\frac{1}{p}-\log n=-\Gamma'(1),$$

et dès lors nous n'aurons plus qu'à démontrer que l'expressio

$$(2)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_1^n\frac{r_p}{n(n-p+1)}$$

converge vers une limite déterminée.

Or cela est facile, en remarquant que l'on a

$$\lim_{n=\infty}\sum_1^{n-\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{r_p}{n(n-p+1)}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\,dx}{1-x}=\log 2-\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n=\infty}\sum_{n-\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)+1}^{n-\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)}\frac{r_p}{n(n-p+1)}=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{x\,dx}{1-x}=\log\frac{3}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n=\infty}\sum_{n-\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)+1}^{n-\mathrm{E}\left(\frac{n}{4}\right)}\frac{r_p}{n(n-p+1)}=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{x\,dx}{1-x}=\log\frac{4}{3}-\frac{1}{4},$$

en sorte que l'on obtient pour la limite de l'expression (2)

$$\sum_1^\infty\left[\log\left(\frac{p+1}{p}\right)-\frac{1}{p+1}\right]=\sum_1^\infty\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^4+\ldots$$

ou bien, en posant $S_k=\sum_1^\infty\frac{1}{p^k}$,

$$(3)\quad .\ \lim_{n=\infty}\sum_1^n\frac{r_p}{n(n-p+1)}=\tfrac{1}{2}(S_2-1)+\tfrac{1}{3}(S_3-1)+\tfrac{1}{4}(S_4-1)+\ldots$$

Maintenant, on considère le développement

$$\log\Gamma(1-x)=-\Gamma'(1)x+\tfrac{1}{2}S_2x^2+\tfrac{1}{3}S_3x^3+\tfrac{1}{4}S_4x^4+\ldots$$

en retranchant

$$\log \frac{1}{1-x} = x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^2 + \ldots,$$

on aura

$$\log \Gamma(2-x) = -[1+\Gamma'(1)]\, x + \tfrac{1}{2}(\mathrm{S}_2 - 1)\, x^2 + \tfrac{1}{3}(\mathrm{S}_3 - 1)\, x$$

et, posant $x = 1$,

$$1 + \Gamma'(1) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{S}_2 - 1) + \tfrac{1}{3}(\mathrm{S}_3 - 1) + \ldots;$$

donc

$$(4) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \lim_{n=\infty} \sum_1^n \frac{r_p}{n(n-p+1)} = 1 + \Gamma'(1),$$

ce qui achève la démonstration du résultat annoncé.

XVIII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 740—742.)

Sur l'évaluation approchée des intégrales.

(Note présentée par M. Hermite.)

Soit $f(x)$ une fonction qui reste constamment positive quand l variable croît de $x = a$ jusqu'à $x = b$, et considérons l'intégrale

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \int_a^b f(x)\,\mathfrak{F}(x)\,dx.$$

M Heine, dans son beau Traité des fonctions sphériques, a dé montré que, si $\mathfrak{F}(x)$ est un polynôme du degré $2n-1$ au plus, l valeur de cette intégrale peut s'obtenir à l'aide de n valeurs spéciales convenablement choisies, $\mathfrak{F}(x_1)$, $\mathfrak{F}(x_2)$, ..., $\mathfrak{F}(x_n)$. Les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x$ sont toutes différentes entre elles et s'obtiennent comme les racine d'une équation du degré n,

$$\mathfrak{N}(x) = x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots = 0,$$

dont les coefficients dépendent des $2n$ constantes

$$c_t = \int_a^b x^t f(x)\,dx.$$

$$(t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1)$$

La valeur de l'intégrale (1) se présente alors sous la forme

$$A_1\,\mathfrak{F}(x_1) + A_2\,\mathfrak{F}(x_2) + \ldots + A_n\,\mathfrak{F}(x_n).$$

$$(2) \quad \ldots \ldots \int_a f(x) \frac{\quad}{x-x_k}\, dx = \mathfrak{N}'(x_k)\, A_k,$$

$$(3) \quad \ldots \ldots \int_a^b f(x) \left[\frac{\mathfrak{N}(x)}{x-x_k}\right]^2 dx = [\mathfrak{N}'(x_k)]^2 A_k,$$

$$(4) \quad \ldots \ldots \int_a^b x^t f(x)\, \mathfrak{N}(x)\, dx = 0.$$

$$(t = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

La formule (3) fait voir que les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sont tou positifs.

Soit maintenant $\mathfrak{G}(x)$ une fonction qui reste continue et ne présent qu'un nombre fini de maxima et minima entre les limites $x=a, x=b$ On a, dans cette supposition, le développement en série

$$\mathfrak{G}(x) = \sum_0^\infty a_k X_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

X_k étant le polynôme connu de Legendre. Cette série, d'après c qu'a démontré M. Heine, est convergente uniformément pour toute les valeurs de x entre a et b. Il s'ensuit qu'en posant

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_0^{2n-1} a_k X_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

$$\mathfrak{R}(x) = \sum_{2n}^\infty a_k X_k \left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right),$$

on pourra prendre n toujours assez grand, pour que $\mathfrak{R}(x)$ reste con stamment inférieur en valeur absolue à une quantité arbitraire ε.

Or on a

$$\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{T}(x) + \mathfrak{R}(x),$$

donc

$$\int_a^b f(x)\, \mathfrak{G}(x)\, dx - \sum_1^n A_k\, \mathfrak{G}(x_k) = \int_a^b f(x)\, \mathfrak{T}(x)\, dx - \sum_1^n A_k\, \mathfrak{T}(x_k) +$$

$$+ \int_a^b f(x)\, \mathfrak{R}(x)\, dx - \sum_1^n A_k\, \mathfrak{R}(x_k).$$

Mais, $\mathfrak{F}(x)$ étant un polynôme du degré $2n-1$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathfrak{F}(x)\,dx - \sum_1^n A_k\,\mathfrak{F}(x_k) = 0.$$

De plus, les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant positifs et leur s
égale à $\int_a^b f(x)\,dx$, on a

$$\sum_1^n A_k\,\mathfrak{R}(x_k) < \varepsilon \int_a^b f(x)\,dx;$$

de même,

$$\int_a^b f(x)\,\mathfrak{R}(x)\,dx < \varepsilon \int_a^b f(x)\,dx.$$

On en conclut que la différence

$$\int_a^b f(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx - \sum_1^n A_k\,\mathfrak{G}(x_k)$$

est inférieure à $2\varepsilon \int_a^b f(x)\,dx$. En prenant donc $\sum_1^n A_k\,\mathfrak{G}(x_k)$ p
valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx$, l'erreur peut devenir aussi
qu'on veut par une détermination convenable du nombre n.

XIX.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 798—799.)

Sur l'évaluation approchée des intégrales.

(Note présentée par M. Hermite.)

Voici encore quelques autres circonstances qui se rattachen
remarque que A_k est positif. Considérons l'expression

$$\Omega = \int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\,dz = \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots$$

On sait que le polynôme $\mathfrak{N}(x)$ qui détermine les valeurs
.. , x_n est le dénominateur de la réduite d'ordre n de la f
continue

$$(5) \quad \ldots \quad \Omega = \cfrac{c_0}{x - a_0 - \cfrac{\lambda_1}{x - a_1 - \cfrac{\lambda_2}{x - a_2 - \cfrac{\lambda_3}{x - a_3 - \ldots}}}}$$

Posons

$$\begin{array}{ll} P_0 = 0, & Q_0 = 1, \\ P_1 = c_0, & Q_1 = x - a_0, \\ P_2 = (x - a_1)\,P_1 - \lambda_1 P_0, & Q_2 = (x - a_1)\,Q_1 - \lambda_1 Q_0, \\ P_3 = (x - a_2)\,P_2 - \lambda_2 P_1, & Q_3 = (x - a_2)\,Q_2 - \lambda_2 Q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots ; & \ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

alors $\mathfrak{N}(x) = Q_n$ et

En faisant attention aux équations (4), cette dernière formule fai[t] bien voir que le développement de $Q_n \Omega - P_n$ suivant les puissance[s] descendantes de x commence par un terme en x^{-n-1}.

La comparaison de (2) et (6) donne

$$Q'_n(x_k)\, A_k = P_n(x_k).$$

Si l'on suppose $x_1 > x_2 > x_3 \ldots$, les valeurs $Q'_n(x_1)$, $Q'_n(x_2)$, . . se[ront] alternativement positives et négatives. A_k étant positif, il s'en suit que de même $P_n(x_1)$, $P_n(x_2)$, ... seront alternativement positif[s] et négatifs. Donc les racines de l'équation

$$P_n(x) = 0$$

séparent celles de l'équation

$$Q_n(x) = 0.$$

En posant $x = x_1$, $x = x_2$, ... dans la relation connue

$$P_n(x)\, Q_{n-1}(x) - P_{n-1}(x)\, Q_n(x) = c_0\, \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1},$$

on verra facilement que, de même, les racines de $Q_{n-1}(x) = 0$ sé[-]parent celles de $Q_n(x) = 0$ et, de plus, que $c_0\, \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ est positif[.] Cette conclusion subsistant pour toutes les valeurs de n, on voi[t] que λ_1, λ_2, λ_3, ... sont tous positifs.

Considérons encore la relation

$$Q_n = (x - a_{n-1})\, Q_{n-1} - \lambda_{n-1}\, Q_{n-2},$$

d'où

$$0 = (x_1 - a_{n-1})\, Q_{n-1}(x_1) - \lambda_{n-1}\, Q_{n-2}(x_1),$$
$$0 = (x_n - a_{n-1})\, Q_{n-1}(x_n) - \lambda_{n-1}\, Q_{n-2}(x_n).$$

On voit facilement que $Q_{n-1}(x_1)$ et $Q_{n-2}(x_1)$ sont positifs, tandi[s] que $Q_{n-1}(x_n)$ et $Q_{n-2}(x_n)$ sont de signes contraires Il s'ensuit que a_{n-}[1] est compris entre x_1 et x_n.

En somme, nous pouvons affirmer que dans le développement e[n] fraction continue (5), λ_1, λ_2, λ_3, ... sont tous positifs, tandis que a_0, a_1[,] a_2, ... ont des valeurs comprises entre a et b.

XX.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 889—892.)

Sur quelques théorèmes arithmétiques.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

Soit $f(n)$ le nombre des solutions de l'équation

$$n = x^2 + y^2;$$

lorsque n est impair on a, comme on sait,

$$f(2\,n) = f(n);$$

cela étant, vous trouvez, pour $n = 4\,t + 1$,

$$f(2\,.\,1) + f(2\,.\,5) + \ldots + (2\,.\,n)$$
$$= 8\left[\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n-3^2}{3\,.\,4}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n-5^2}{5\,.\,4}\right) - \ldots\right] + 4\cos^2\frac{(\mu-1)\,\pi}{4}$$

μ étant l'entier impair immédiatement au dessous de $\sqrt{n}$ ou égal à $\sqrt{}$

On a aussi, en supposant $n = 8\,t + 1$,

$$f(1) + f(9) + f(17) + \ldots + f(n)$$
$$= 8\left[\mathrm{E}\left(\frac{n-1}{8}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n-3^2}{3\,.\,8}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n-5^2}{5\,.\,8}\right) - \ldots\right] + 4\cos^2\frac{(\mu-1)\,\pi}{4}$$

μ étant l'entier impair immédiatement au-dessous de $\sqrt{n}$ ou égal à $\sqrt{}$

et encore, pour $n = 8\,t + 5$,

$$f(5) + f(13) + f(21) + \ldots + f(n)$$
$$= 8\left[\mathrm{E}\left(\frac{n-1\,.\,5}{8}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n-3\,.\,7}{3\,.\,8}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{n-5\,.\,9}{5\,.\,8}\right) - \ldots\right] + \sin^2\frac{k\,\pi}{2}$$

Soit en second lieu $\varphi(x)$ la somme des diviseurs impairs de x, j'obtie

$$\varphi(1)+\varphi(5)+\ldots+\varphi(4n+1)$$
$$=2\sum \mathrm{E}^2\left(\frac{n-k^2+k+1}{2k+1}\right)+4\sum k\,\mathrm{E}\left(\frac{n-k^2+k+1}{2k+1}\right)-\lambda^2,$$

où

$$\lambda=\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right).$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

En écrivant ceci, je crois voir que cette formule rentrera dans vôtre à l'aide de la relation

$$\mathrm{E}^2\left(\frac{n-k^2+k+1}{2k+1}\right)+2k\,\mathrm{E}\left(\frac{n-k^2+k+1}{2k+1}\right)=\mathrm{E}^2\left(\frac{n+k^2+2k+1}{2k+1}\right)-$$

On peut écrire encore

$$\varphi(1)+\varphi(5)+\ldots+\varphi(n)$$
$$=2\sum \mathrm{E}^2\left(\frac{n-r^2}{4r}\right)+4\sum\frac{r+1}{2}\,\mathrm{E}\left(\frac{n-r^2}{4r}\right)+\mathrm{E}^2\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right).$$
$$(r=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots)$$

J'obtiens encore

$$\varphi(1)+\varphi(3)+\varphi(5)+\ldots+\varphi(2n-1)$$
$$=\sum \mathrm{E}^2\left(\frac{n-2k^2}{2k+1}\right)+\sum(4k+1)\,\mathrm{E}\left(\frac{n-2k^2}{2k+1}\right)-\mathrm{E}^2\left(\frac{\sqrt{2n-1}+1}{2}\right).$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

On a enfin

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=\mathrm{E}\left(\frac{n}{1}\right)+3\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)+5\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{5}\right)+\ldots,$$

puis, au moyen d'une transformation analogue à celle que vous av faite de la somme

$$\mathrm{E}\left(\frac{n}{1}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots,$$

on trouve

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)=\mathrm{S}+\mathrm{S}_1-\lambda^3$$

en posant

$$\mathrm{S}=\mathrm{E}\left(\frac{n}{1}\right)+3\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{3}\right)+\ldots+(2\lambda-1)\,\mathrm{E}\left(\frac{n}{2\lambda-1}\right),$$

$$\mathrm{S}_1=\mathrm{E}^2\left(\frac{n+1}{2}\right)+\mathrm{E}^2\left(\frac{n+2}{4}\right)+\ldots+\mathrm{E}^2\left(\frac{n+\lambda}{2\lambda}\right),$$

$$\lambda=\mathrm{E}\left(\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right).$$

Je me suis aussi occupé de la fonction $F(n)$, exprimant le nomb[re] des représentations de n, par la forme x^2+2y^2. La considération [de] la série

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\, q^{k^2+2l^2}$$

donne d'abord la formule

$$F(n)=2(d_1+d_3-d_5-d_7),$$

où d_1, d_3, d_5, d_7 signifient les nombres des diviseurs de n qui sont com-pris dans les formes

$$8k+1,\quad 8k+3,\quad 8k+5,\quad 8k+7,$$

et l'on en conclut

$$F(1)+F(2)+\ldots+F(n)=2\left[E\left(\frac{n}{1}\right)+E\left(\frac{n}{3}\right)-E\left(\frac{n}{5}\right)-E\left(\frac{n}{7}\right)+\ldots\right].$$

Cela posé, j'obtiens, par une transformation analogue à la vôtre, la formule suivante. Soit, pour abréger,

$$\varphi(x)=2\sin^2\frac{\pi x}{4},$$

de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned}\varphi(4k+1)&=1,\\ \varphi(4k+2)&=2,\\ \varphi(4k+3)&=1,\\ \varphi(4k)\quad&=0,\end{aligned}$$

puis,

$$\lambda=E\left(\frac{\sqrt{8n+1}+1}{4}\right).$$

et posons

$$S=E\left(\frac{n}{1}\right)+E\left(\frac{n}{3}\right)-E\left(\frac{n}{5}\right)-E\left(\frac{n}{7}\right)+\ldots\pm E\left(\frac{n}{2\lambda-1}\right),$$

$$S_1=\varphi\left[E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]+\varphi\left[E\left(\frac{n+2}{4}\right)\right]+\quad+\varphi\left[E\left(\frac{n+\lambda}{2\lambda}\right)\right],$$

nous aurons

$$F(1)+F(2)+\ldots+F(n)=2[S+S_1-\lambda\varphi(\lambda)].$$

XXI.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 981—982.)

Sur la décomposition d'un nombre en cinq carrés.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

Permettez-moi de vous communiquer un résultat que je crois nouveau, sur la décomposition d'un nombre $N \equiv 5$, mod 8, en cinq carrés impairs et positifs En désignant par $\varphi(m)$ la somme des diviseurs de m, le nombre de ces décompositions est

$$\varphi\left(\frac{N-1^2}{4}\right)+\varphi\left(\frac{N-3^2}{4}\right)+\varphi\left(\frac{N-5^2}{4}\right)+\dots$$

C'est une conséquence facile du théorème de Jacobi concernant la décomposition en quatre carrés impairs et positifs d'un nombre $\equiv 4$, mod 8; théorème qu'on peut maintenant considérer comme élémentaire. Or je trouve que ce même nombre des représentations de $N \equiv 5$, mod 8, par cinq carrés peut s'exprimer aussi par cette nouvelle formule

$$f(N)+2f(N-8.1^2)+2f(N-8.2^2)+2f(N-8.3^2)+\dots$$

La fonction $f(m)$ est définie de la manière suivante:

$$4f(m)=-\Sigma(-1)^{\frac{d^2-1}{8}}d,$$

impairs; mais je ne sais si ce théorème peut aussi se tirer de la théorie des fonctions elliptiques [1]).

---

1) Voici, pour la décomposition en cinq carrés impairs et positifs, une proposition que donnent les formules de la théorie des fonctions elliptiques. Soit n un entier $\equiv 1$, mod 4; posons, de toutes les manières possibles, $n = dd'$ sous la condition $d' > 3d$; je considérerai la fonction

$$\chi(n) = \Sigma \tfrac{1}{4}(3d + d'),$$

qui peut être définie par développement

$$\begin{aligned}\chi(5)\,q + \chi(9)\,q^2 + \ldots + \chi(4m+1)\,q^m + \ldots \\ = \frac{q}{1-q} + \frac{4q^8}{1-q^3} + \frac{7q^{21}}{1-q^5} + \ldots + \frac{(3m-2)\,q^{m(3m-2)}}{1-q^{2m-1}} + \ldots \\ + \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^8}{(1-q^3)^2} + \frac{q^{21}}{(1-q^5)^2} + \ldots + \frac{q^{m(3m-2)}}{(1-q^{2m-1})^2} + \ldots\end{aligned}$$

Cela étant, le nombre des décompositions d'un entier $N \equiv 5$, mod 8, s'obtient par la formule

$$\tfrac{1}{2}\chi(N) + \chi(N-2^2) + \chi(N-4^2) + \chi(N-6^2) + \ldots$$

Supposons, par exemple, $N = 45$, ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}\chi(45) = 9, \quad \chi(41) = 11, \quad \chi(29) = 8, \quad \chi(9) = 3;$$

nous aurons 31 pour le nombre cherché, et c'est bien en effet ce qu'on trouve par le développement

$$(\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \ldots)^5 = q^{\frac{5}{4}}(1 + 5q^2 + 10q^4 + 15q^6 + 25q^8 + 31q^{10} + \ldots).$$

(C. H.)

XXII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 1358—1359.)

Sur un théorème de Liouville.

(Note, présentée par M. Hermite.)

Dans le Tome XIV (2e série, année 1869, p. 1) du Journal de Mathématiques pures et appliquées, Liouville, dans une Lettre adressée à M. Besge, a donné une relation remarquable entre les nombres de classes de formes quadratiques

A l'aide de considérations arithmétiques, j'ai pu établir d'autres relations d'une forme analogue, et je me suis aperçu après qu'on peut établir aussi toutes ces formules à l'aide de la théorie des fonctions elliptiques Les théorèmes I—IV qui vont suivre sont ceux que je connais jusqu'à présent; le premier théorème est celui qui a été donné par Liouville.

Comme je l'ai déjà dit, on peut vérifier ces théorèmes à l'aide de formules tirées de la théorie des fonctions elliptiques; mais déjà dans le cas du théorème IV, cette vérification demande des calculs assez prolixes.

Désignons généralement par $F(n)$ le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-n$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Toutefois, lorsque n est un carré impair, il faudra diminuer de $\frac{1}{2}$ le nombre de ces classes pour avoir $F(n)$; ainsi $F(1)=\frac{1}{2}$, $F(9)=2\frac{1}{2}$, ... Cette convention, qui simplifie les formules a été introduite par M. Kronecker.

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

Théorème I. — Soit N un nombre positif impair ; alors

$$\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\,\mathrm{F}(4\,\mathrm{N}-s^2)=\Sigma(x^2-y^2)$$

La sommation, dans le second membre, a rapport à toutes le solutions de $\mathrm{N}=x^2+y^2$, x étant impair et positif, y étant quelconque positif, nul ou négatif

Théorème II. — Soit N un nombre positif quelconque ; alors

$$2\,\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\,\mathrm{F}(4\,\mathrm{N}-2\,s^2)=(-1)^{\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)}{2}}\Sigma(x^2-2\,y^2).$$

La sommation, dans le second membre, a rapport à toutes le solutions de $\mathrm{N}=x^2+2\,y^2$, x et y étant des nombres entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs

Théorème III. — Soit N un nombre positif de la forme $8k+3$; alor

$$2\,\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s\,\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N}-s^2}{2}\right)=(-1)^{\frac{\mathrm{N}+5}{8}}\Sigma(x^2-2\,y^2).$$

La sommation, dans le second membre, a rapport à toutes le solutions de $\mathrm{N}=x^2+2\,y^2$, x et y étant positifs et impairs.

Théorème IV. — Soit N un nombre positif quelconque ; alors

$$\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\,\mathrm{F}(16\,\mathrm{N}-3\,s^2)=\Sigma(x^2-3\,y^2).$$

La sommation, dans le second membre, a rapport à toutes le solutions de $\mathrm{N}=x^2+3\,y^2$, x et y étant des nombres entiers quelconques, positifs, nuls ou négatifs, soumis seulement à cette restriction que $x+y$ doit être impair.

Nous devons ajouter que, dans toutes ces formules, le second membre devient égal à zéro lorsqu'il n'y a pas de représentation de N par la forme quadratique indiquée. Cela a lieu, par exemple, dans le premier théorème, lorsque N est de la forme $4k+3$, et dans le quatrième, lorsque N est pair.

XXIII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 1415—1418.)

Sur un théorème de M. Liouville.

(Note, présentée par M. Hermite.)

e propose de montrer comment la théorie des fonctions ellip-
conduit au théorème de M Liouville, qui a été l'objet de ma
nte Note.

ésignant par K et E les intégrales complètes de première et
nde espèce, les formules relatives au développement des fonc-
seconde espèce donnent

$$\frac{K(K-E)}{\pi^2} = 2\,\frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + 25q^{25} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots},$$

$$\dots\quad \frac{4KE}{\pi^2} = 2\,\frac{q^{\frac{1}{4}} + 9q^{\frac{9}{4}} + 25q^{\frac{25}{4}} + \dots}{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \dots}.$$

plaçant q par q^4 dans cette dernière équation, on trouvera

$$.\ \Sigma x^2 q^{x^2} = \frac{K}{\pi^2}\sqrt{\frac{K}{2\pi}}\left[\frac{1-\sqrt{k'}}{2}E + \frac{\sqrt{k'}(1-k'\sqrt{k'})}{2}K\right].$$

$$(x = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots)$$

ant cette formule avec (1), on aura

$$.\ \Sigma y^2 q^{y^2} = \frac{K}{\pi^2}\sqrt{\frac{K}{2\pi}}[(1+\sqrt{k'})E - \sqrt{k'}(1+k'\sqrt{k'})K],$$

$$(y = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \dots)$$

$$(y = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots)$$

Les formules (3), (4), (5), (6) donnent maintenant

$$\Sigma\,\Sigma\,(x^2 - y^2)\,q^{x^2+y^2} = \frac{K^3}{2\,\pi^3}\,k^2\sqrt{k'}$$

ou bien

$$(7)\quad .\ .\quad 16\,\Sigma\,\Sigma\,(x^2 - y^2)\,q^{x^2+y^2} = \frac{8\,K^3}{\pi^3}\,k^2\sqrt{k'} = \theta\,(q)\,\theta_2^4\,(q)\,\theta_3\,(q),$$

en posant

$$\theta\,(q) = 1 - 2\,q + 2\,q^4 - 2\,q^9 + \ldots = \sqrt{\frac{2\,k'\,K}{\pi}},$$

$$\theta_2(q) = \quad 2\,q^{\frac{1}{4}} + 2\,q^{\frac{9}{4}} + \ldots \quad = \sqrt{\frac{2\,k\,K}{\pi}},$$

$$\theta_3\,(q) = 1 + 2\,q + 2\,q^4 + 2\,q^9 + \ldots = \sqrt{\frac{2\,K}{\pi}}.$$

Or on connaît ce développement

$$\theta\,(q)\,\theta_2\,(q)\,\theta_3\,(q) = 2\left(q^{\frac{1}{4}} - 3\,q^{\frac{9}{4}} + 5\,q^{\frac{25}{4}} - \ldots\right),$$

et, d'après une formule due à M. Hermite,

$$\theta_2^3(q) = 8\sum_0^{\infty} F\,(8\,n + 3)\,q^{\frac{8\,n+3}{4}}.$$

L'équation (7) peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$\Sigma\,(-1)^{\frac{x-1}{2}}\,x\,q^{\frac{x^2}{4}}\sum_0^{\infty} F\,(8\,n + 3)\,q^{\frac{8\,n+3}{4}} = \Sigma\,\Sigma\,(x^2 - y^2)\,q^{x^2+y^2}\ ,$$

où il faut poser $x = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$ et $y = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \ldots$

Cette formule donne immédiatement le théorème de M. Lio
en comparant dans les deux membres les coefficients des m
puissances de q.

Remarquons que les relations connues

$$\theta\,(q)\,\theta_3\,(q) = \theta^2\,(q^2) \quad \text{et} \quad \theta_2^2\,(q) = 2\,\theta_2\,(q^2)\,\theta_3\,(q^2)$$

donnent

$$\theta\,(q)\,\theta_2^4\,(q)\,\theta_3\,(q) = 4\,[\theta\,(q^2)\,\theta_2\,(q^2)\,\theta_3\,(q^2)]^2 = 16\left[\Sigma\,(-1)^{\frac{x-1}{2}}\,x\,q^{\frac{x^2}{2}}\right]^2.$$

On aurait donc pu établir la formule (7) un peu plus simplement e formant directement le carré de cette série $\Sigma(-1)^{\frac{x-1}{2}} x q^{\frac{x^2}{8}}$; ma es formules (3) et (4), dont nous nous sommes servi, peuvent êt tiles dans d'autres cas.

Ajoutons encore aux théorèmes déjà énoncés les trois suivants

Théorème V. — Soit N un nombre positif de la forme $8k+5$; alo

$$8\,\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}} s\,F(N-2s^2) = \Sigma(x^2-y^2).$$

La sommation, dans le second membre, a rapport à toutes l olutions de l'équation $2N = x^2 + y^2$, x^2 étant un carré de la form $6k+9$ et, par suite, y^2 un carré de la forme $8k+1$.

Théorème VI. — Soit N un nombre positif de la forme $8k+1$, alo

$$2\,\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s\,F(2N-s^2) = \Sigma(-1)^y (x^2-8y^2)$$

La sommation, dans le second membre, doit s'étendre à tout es solutions de l'équation $N = x^2 + 8y^2$, x étant positif et impai un nombre quelconque, positif, nul ou négatif.

Théorème VII. — Soit N un nombre de la forme $8k+5$, alors

$$2\,\Sigma(-1)^{\frac{s-1}{2}+\frac{s^2-1}{8}} s\,F(2N-s^2) = \Sigma(x^2-y^2).$$

La sommation, dans le second membre, doit s'étendre à tout es solutions de l'équation $2N = x^2 + y^2$, x^2 étant un carré de la form $k+9$, y^2 un carré de la forme $8k+1$.

Dans ces formules, le second membre devient égal à zéro tout es fois qu'il n'y a pas de représentation de $2N$ ou de N par la form ndiquée.

XXIV.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 97, 1883, 1545—1547.)

Sur le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

Dans votre dernière lettre vous m'avez communiqué ces deux formules

$$(a)\left\{\begin{aligned} &q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \dots \\ &\quad = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)\left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \dots\right],\end{aligned}\right.$$

$$(b)\left\{\begin{aligned} &q^{\frac{1}{4}} + 9q^{\frac{9}{4}} + 25q^{\frac{25}{4}} + \dots \\ &\quad = \left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + \dots\right)\left[1 + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \frac{8q^6}{(1+q^6)^2} + \dots\right].\end{aligned}\right.$$

C'est en étudiant votre première formule (a) que j'ai été amené à considérer de nouveau cette fonction $F(n)$ qui représente le nombre total des solutions de $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2$.

Le nombre des solutions de $n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ étant

$$8\,[2 + (-1)^n]\,\varphi(n),$$

$\varphi(n)$ désignant la somme des diviseurs impairs de n, il s'ensuit

$$\begin{aligned} F(n) = {} & 16\,[\varphi(n) + 2\varphi(n-1) + 2\varphi(n-4) + 2\varphi(n-9) + \dots] \\ & + 8(-1)^n\,[\varphi(n) - 2\varphi(n-1) + 2\varphi(n-4) - 2\varphi(n-9) + \dots].\end{aligned}$$

Il est essentiel d'observer que, lorsque n est un carré, il faut en-

s aurons donc

$$\ldots\ldots \begin{cases} F(n) = 24\,A(n) + 16\,B(n) & (n \text{ pair}), \\ F(n) = 8\,A(n) + 48\,B(n) & (n \text{ impair}). \end{cases}$$

Iaintenant votre formule (a) donne aisément les relations suivantes

$$\begin{aligned} A(n) &= 4\,B(n) \quad (n \equiv 3, \bmod 4), \\ A(n) &= 8\,B(n) \quad (n \equiv 5, \bmod 8), \\ A(n) &= B(n) \quad (n \equiv 2, \bmod 4). \end{aligned}$$

s'ensuit donc une simplification de l'expression de $F(n)$ dans les nules (2). Or je trouve qu'une telle réduction est toujours possible. peut, en effet, exprimer toujours ces deux fonctions $A(n)$, $B(n)$ l'une l'autre. Voici, à cet effet, les formules

$$\begin{aligned} A(n) &= 4\,B(n) \quad (n \equiv 3, \bmod 4), \\ A(n) &= 24\,B(n) \quad (n \equiv 1, \bmod 8), \\ A(n) &= 8\,B(n) \quad (n \equiv 5, \bmod 8), \\ 8^k\,A(n) &= \frac{2^{3k+1}+5}{7}\,B(n) \quad (n = 2^{2k+1}m,\ m \equiv 1, \bmod 2,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots), \\ 8^k\,A(n) &= \frac{2^{3k+1}+5}{7}\,B(n) \quad (n = 4^k m,\quad m \equiv 3, \bmod 4,\ k = 1, 2, 3, \ldots), \\ 6\,.\,8^k\,A(n) &= \frac{3\,.\,2^{3k+2}-5}{7}\,B(n) \quad (n = 4^k m,\quad m \equiv 1, \bmod 8,\ k = 1, 2, 3, \ldots), \\ 2\,.\,8^k\,A(n) &= \frac{2^{3k+2}+3}{7}\,B(n) \quad (n = 4^k m,\quad m \equiv 5, \bmod 8,\ k = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

ne réduction ultérieure de l'expression de $F(n)$ est possible à le de ces relations

$$\ldots\ldots \begin{cases} B(4n) = 16\,B(n) & (n \equiv 3, \bmod 4), \\ B(4n) = 96\,B(n) & (n \equiv 1, \bmod 8), \\ B(4n) = 32\,B(n) & (n \equiv 5, \bmod 8), \\ B(4n) = 8\,B(n) & (n \text{ pair}). \end{cases}$$

n trouvera de cette manière

$$\ldots \begin{cases} F(24^k\,.\,m) = 40\,f(k)\,B(2m) & (m \equiv 1, \bmod 2), \\ F(4^k\,.\,m) = 80\,f(k)\,B(m) & (m \equiv 3, \bmod 4), \\ F(4^k\,.\,m) = 240\,[\,2\,f(k) - 1]\,B(m) & (m \equiv 1, \bmod 8), \\ F(4^k\,.\,m) = 16\,[10\,f(k) - 3]\,B(m) & (m \equiv 5, \bmod 8), \\ \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$f(k)=\frac{2^{3k+2}+3}{7},$$

donc

$$f(0)=1,\quad f(1)=5,\quad f(2)=37,\quad \ldots,\quad f(k+1)=8f(k)-3.$$

On voit par conséquent qu'on peut dans tous les cas exprimer $F(4n)$ par $F(n)$.

Ayant construit une table de la fonction $B(n)$ pour les premières centaines, j'ai observé qu'on a toujours, p étant un nombre premier impair,

$$B(p^2)=\frac{p^3-p+1}{24}.$$

Ayant vérifié cette formule dans un grand nombre de cas, je n'ai pas de doute qu'elle ne soit vraie géneralement, quoique je ne l'aie pas encore démontré. On a donc aussi

$$F(p^2)=10(p^3-p+1).$$

Peut-être a-t-on encore

$$B(p^4)=\frac{p(p^2-1)(p^3+1)+1}{24}$$

et

$$F(p^4)=10[p(p^2-1)(p^3+1)+1],$$

mais je n'ai vérifié cette relation que pour $p=3$, 5 et 7 : les calculs deviennent trop laborieux.

XXV.

(Amsterdam, Versl. K. Akad. Wet., 1° sect., sér. 2, 19,
1884, 105—111.)

Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm $3n+1$.

Elk priemgetal $p = 3n+1$ kan voorgesteld worden als de som n eene volkomen tweede macht en het drievoud van eene andere komen tweede macht

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad p = cc + 3\,dd$$

Het viervoud van zulk een priemgetal kan verder steeds aldus orgesteld worden

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 4p = \mathrm{AA} + 27\,\mathrm{BB}$$

Elk dezer ontbindingen is slechts op ééne wijze mogelijk. Dit es valt gemakkelijk uit de algemeene theorie der quadratische rmen af te leiden.

In het tweede deel van Crelle's Journal heeft Jacobi, in de verndeling „de residuis cubicis commentatio numerosa" zonder bewijs ngegeven, dat de waarde van A in (2) gelijk is aan de rest, die en verkrijgt bij de deeling van het geheele getal

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n}$$

or p, waarbij men deze rest tusschen $-\frac{1}{2}p$ en $+\frac{1}{2}p$ te kiezen eft. Hierbij doet zich dan nog de merkwaardige omstandigheid or, dat $\mathrm{A}+1$, bij deze bepaling van A, steeds door 3 deelbaar is.

Voor de eerste priemgetallen verkrijgt men bijv.:

$p = 7$	$n = 2$	$A = -1$	$28 = 1^2 + 27.1^2$
$p = 13$	$n = 4$	$A = +5$	$52 = 5^2 + 27.1^2$
$p = 19$	$n = 6$	$A = -7$	$76 = 7^2 + 27.1^2$
$p = 31$	$n = 10$	$A = -4$	$124 = 4^2 + 27.2^2$
$p = 37$	$n = 12$	$A = +11$	$148 = 11^2 + 27.1^2$
$p = 43$	$n = 14$	$A = +8$	$172 = 8^2 + 27.2^2$
$p = 61$	$n = 20$	$A = -1$	$244 = 1^2 + 27.3^2$

Het bewijs van deze eigenschap, die in een nauw verband staat met de eigenschappen der algebraïsche vergelijking, van welke de verdeeling van den cirkelomtrek in p deelen afhangt, is te vinden in Cauchy's Mémoire sur la théorie des nombres (Mém. de l'Acad. d. Sc., t. 17, 1840) en bij Lebesgue in het Journal de Liouville t. 2, p. 279. Voor verdere bijzonderheden is te verwijzen naar Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung, p. 144.

Op andere wijze is dit theorema van Jacobi ook afgeleid in de verhandeling „Bijdrage tot de theorie der derde- en vierde-machtsresten" in het 17de deel der Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen en wel aldaar in art 40, p. 416.

Aanknoopende aan de ontwikkelingen daar voorkomende, wensch ik hier, uit het theorema van Jacobi, eene directe bepaling van den wortel c van het enkelvoudige quadraat in (1) af te leiden; het zal dan blijken, dat c de tusschen $-\frac{1}{2}p$ en $+\frac{1}{2}p$ gelegen rest is, die men verkrijgt bij de deeling van het geheele getal

$$2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n}$$

door p, en verder is dan $c-1$ door 3 deelbaar. Bijv.:

$p = 7$	$n = 2$	$c = -2$	$7 = 2^2 + 3.1^2$
$p = 13$	$n = 4$	$c = +1$	$13 = 1^2 + 3.2^2$
$p = 19$	$n = 6$	$c = +4$	$19 = 4^2 + 3.1^2$
$p = 31$	$n = 10$	$c = -2$	$31 = 2^2 + 3.3^2$
$p = 37$	$n = 12$	$c = -5$	$37 = 5^2 + 3.2^2$

Zij dan, evenals in de aangehaalde verhandeling, ϱ een primitieve demachtswortel der eenheid, $a + b\,\varrho$ een primaire factor van p, dus

$$p = (a + b\,\varrho)(a + b\,\varrho^2) = a^2 - ab + b^2,$$

-1 en b beiden door 3 deelbaar; verder f een der beide wortels ı de congruentie:

$$1 + x + x^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

wel f zóó gekozen, dat $a + bf$ door p deelbaar is.

Volgens het boven aangehaalde theorema van Jacobi is dan

$$. \ . \ . \ . \quad 2a - b \equiv -\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod{p}$$

verder is volgens de criteria voor het cubisch karakter van 2

$$2^n \equiv 1$$

ınneer b even is,

$$2^n \equiv f \pmod{p}$$

ınneer a even is,

$$2^n \equiv f^2$$

ınneer a en b beiden oneven zijn. (Zie t. a. p. p. 398.)

Deze drie gevallen moeten nu afzonderlijk behandeld worden.

I. b even.

n dit geval leiden wij uit

$$p = a^2 - ab + b^2$$

$$\begin{aligned} 4p &= (2a - b)^2 + 3b^2 \\ &= (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + 3(\tfrac{1}{2}b)^2. \end{aligned}$$

n de vergelijking (1) kan dus genomen worden

$$c = -(a - \tfrac{1}{2}b).$$

Uit (3) volgt dan

$$c \equiv \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod{p}$$

wel, daar in dit geval $2^n \equiv 1$ is,

$$. \ . \ . \ . \quad c \equiv 2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod{p}.$$

Uit $a \equiv 2$, $b \equiv 0 \pmod 3$ volgt verder

$$(5^a) \quad \dots \dots \dots \quad c \equiv 1 \pmod 3.$$

II. a even.

In dit geval schrijven wij in plaats van

$$p = a^2 - ab + b^2$$

$$16\,p = (2\,a - 4\,b)^2 + 3\,(2\,a)^2$$

of

$$p = (\tfrac{1}{2}\,a - b)^2 + 3\,(\tfrac{1}{2}\,a)^2,$$

zoodat wij in (1) kunnen nemen

$$c = \tfrac{1}{2}\,a - b.$$

Nu is

$$6)\ (a + bf)(1 + 2f) \equiv a - 2b + (2a - b)f \equiv -a - b - (2a - b)f^2 \pmod p$$

n $a + bf \equiv 0 \pmod p$, derhalve

$$a - 2\,b \equiv -f(2\,a - b),$$

zoodat uit (3) volgt

$$a - 2\,b \equiv f \frac{(n+1)(n+2)\dots(2\,n)}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}$$

of wel, daar nu $f \equiv 2^n$ is,

$$(4^b) \quad \dots \quad c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\dots(2\,n)}{1\,.\,2\,.\,3\dots n} \pmod p.$$

Uit $a \equiv 2$, $b \equiv 0 \pmod 3$ volgt verder

$$(5^b) \quad \dots \dots \dots \quad c \equiv 1 \pmod 3$$

III. a en b oneven.

In dit laatste geval bedenke men, dat

$$16\,p = (2\,a + 2\,b)^2 + 3\,(2\,a - 2\,b)^2$$

is, of

$$p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

zoodat genomen kan worden

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

t (6) volgt nu $a + b \equiv -f^2 (2a - b)$, dus geeft (3)

$$a + b \equiv f^2 \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \pmod p.$$

aar nu in dit geval $2^n \equiv f^2$ is, zoo volgt

$$\ldots\ldots c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \pmod p,$$

ijl gemakkelijk te zien is

$$\ldots\ldots\ldots\ldots c \equiv 1 \pmod 3.$$

it de vergelijkingen 4^a, 4^b, 4^c, 5^a, 5^b, 5^c blijkt nu, dat men in elk l heeft

$$\ldots\ldots c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \pmod p$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots c \equiv 1 \pmod 3,$$

een dus het boven reeds uitgesproken theorema geeft. De con-ntie (4) kan men nog een anderen vorm geven. Daar n even schrijve men $2m$ voor n, dan is

$$c \equiv 2^{2m-1} \frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(4m)}{1.2.3\ldots(2m)}.$$

u is

$$2m + 1 \equiv -(4m),\ 2m + 3 \equiv -(4m - 2),$$
$$2m + 5 \equiv -(4m - 4)\ldots \text{enz.}$$

behulp waarvan men verkrijgt

$$c \equiv (-1)^m 2^{2m-1} \frac{[(2m+2)(2m+4)\ldots(4m)]^2}{1.2.3\ldots(2m)}$$

a eene kleine herleiding

$$c \equiv (-1)^m 2^{4m-1} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(2m)}{1.2.3\ldots m}.$$

u is verder

$$2^{3m} = 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$$\frac{p^2-1}{8} = \frac{9m^2+3m}{2}.$$

Van dezen exponent het even getal $\frac{8\,m^2 + 4\,m}{2}$ aftrekkende, kan men eenvoudiger schrijven

$$2^{3m} \equiv (-1)^{\frac{m^2-m}{2}},$$

dus ten slotte

$$(7)\ .\ c \equiv (-1)^{\frac{m^2+m}{2}}\, 2^{m-1} \frac{(m+1)(m+2)\dots(2\,m)}{1\,.\,2\,.\,3\dots m} \quad (\mathrm{mod}\, p = 6\,m+1).$$

Deze laatste congruentie ter bepaling van c is zonder bewijs, en zonder de hier verkregen nadere bepaling van het teeken van c, gegeven door Oltramare in het 87ste deel der Comptes rendus de l'Acad. d. Sc., p. 735, te gelijk met meer soortgelijke.

XXV.

(Amsterdam, Versl. K. Akad. Wet., 1e sect., sér. 2, 19, 1884, 105—111.)

Sur la décomposition quadratique de nombres premiers de la forme $3n+1$.

Chaque nombre premier $p=3n+1$ peut être représenté par la nme d'un carré parfait et de trois fois un deuxième carré parfait

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad p = cc + 3dd$$

En outre, le quadruple d'un nombre premier de ce genre peut ıjours être représenté par l'expression suivante

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 4p = \mathrm{AA} + 27\,\mathrm{BB}$$

L'une et l'autre décomposition ne sont possibles que d'une seule ınière pour chaque nombre p. Tout ceci se déduit aisément de la éorie générale des formes quadratiques.

Dans le deuxième tome du Journal de Crelle, Jacobi, dans son émoire „de residuis cubicis commentatio numerosa" a énoncé, sans donner la démonstration, le théorème suivant: la valeur de A ns l'expression (2) est égale au résidu qu'on obtient lorsqu'on vise le nombre entier

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n}$$

r p; il est entendu qu'il faut prendre pour résidu un nombre comis entre $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$. Il en résulte de plus la remarquable cirnstance que, lorsqu'on détermine le nombre A de cette manière, $+1$ est toujours un multiple de 3.

Pour les premiers nombres premiers du genre considéré on obtient p. e.

$p = 7$	$n = 2$	$A = -1$	$28 = 1^2 + 27.1^2$
$p = 13$	$n = 4$	$A = +5$	$52 = 5^2 + 27.1^2$
$p = 19$	$n = 6$	$A = -7$	$76 = 7^2 + 27.1^2$
$p = 31$	$n = 10$	$A = -4$	$124 = 4^2 + 27.2^2$
$p = 37$	$n = 12$	$A = +11$	$148 = 11^2 + 27.1^2$
$p = 43$	$n = 14$	$A = +8$	$172 = 8^2 + 27.2^2$
$p = 61$	$p = 20$	$A = -1$	$244 = 1^2 + 27.3^2$.

La preuve de ce théorème, qui est étroitement lié aux propriétés de l'équation algébrique d'où dépend la division de la circonférence du cercle en p parties, se trouve chez Cauchy dans son Mémoire sur la théorie des nombres (Mém. de l'Acad. d. Sc., t. 17, 1840) et chez Lebesgue dans le Journal de Liouville, t. 2, p. 279. Pour plus de détails je renvoie à Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung, p. 144.

Une autre démonstration de ce théorème de Jacobi a été donnée dans l'article „Contribution à la théorie des résidus cubiques et biquadratiques" dans le 17ième tome des Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, p. 416, n° 40.

Je désire ici, en prenant pour point de départ les développements contenus dans cet article, tirer du théorème de Jacobi une détermination directe de la racine c du carré simple qui figure dans l'équation (1). Il paraîtra que c est le résidu situé entre $-\frac{1}{2}p$ et $+\frac{1}{2}p$ que l'on obtient en divisant par p le nombre entier

$$2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n},$$

tandis que $c - 1$ est un multiple de 3.

Par exemple

$p = 7$	$n = 2$	$c = -2$	$7 = 2^2 + 3.1^2$
$p = 13$	$n = 4$	$c = +1$	$13 = 1^2 + 3.2^2$
$p = 19$	$n = 6$	$c = +4$	$19 = 4^2 + 3.1^2$
$p = 31$	$n = 10$	$c = -2$	$31 = 2^2 + 3.3^2$
$p = 37$	$n = 12$	$c = -5$	$37 = 5^2 + 3.2^2$.

iupposons donc, comme dans l'article cité, que ϱ soit une racine ique primitive de l'unité, $a + b\varrho$ un facteur primaire de p, et conséquent

$$p = (a + b\varrho)(a + b\varrho^2) = a^2 - ab + b^2,$$

$a+1$ et b sont l'un et l'autre un multiple de 3. Supposons de s que f soit l'une des deux racines de la congruence

$$1 + x + x^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

nombre f étant choisi de telle manière que $a + bf$ soit divisible p.

)'après le théorème de Jacobi cité plus haut, on a alors

$$. \; . \; . \; . \quad 2a - b \equiv -\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod{p}$$

plus, en vertu des critères du caractère cubique du nombre 2, on a

$$2^n \equiv 1$$

que b est pair

$$2^n \equiv f \pmod{p}$$

que a est pair,

$$2^n \equiv f^2$$

que a et b sont impairs tous les deux. (Consultez la p. 398 du noire cité.)

Ces trois cas doivent être considérés séparément.

I. b est pair.

Cn ce cas l'équation

$$p = a^2 - ab + b^2$$

conduit à

$$\begin{aligned} 4p &= (2a - b)^2 + 3b^2 \\ &= (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + 3(\tfrac{1}{2}b)^2. \end{aligned}$$

Dans l'équation (1) on peut donc prendre

$$c = -(a - \tfrac{1}{2}b),$$

le l'équation (3) l'on tire alors

$$c \equiv \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod{p}$$

u bien, comme dans ce cas $2^n \equiv 1$,

$$4^a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod p.$$

Des équations $a \equiv 2$, $b \equiv 0 \pmod 5$ on tire ensuite

$$5^a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c \equiv 1 \pmod 3.$$

II. $\quad a$ est pair.

Et ce cas nous remplaçons l'équation

$$p = a^2 - ab + b^2$$

ar l'équation

$$16\,p = (2\,a - 4\,b)^2 + 3\,(2\,a)^2$$

u

$$p = (\tfrac{1}{2}\,a - b)^2 + 3\,(\tfrac{1}{2}\,a)^2,$$

e sorte que dans l'équation (1) nous pouvons prendre

$$c = \tfrac{1}{2}\,a - b.$$

Or, on a

$$6) \quad (a + bf)(1 + 2f) \equiv a - 2b + (2a - b)f \equiv -a - b - (2a - b)f^2 \pmod p$$

t $a + bf \equiv 0 \pmod p$. Par conséquent

$$a - 2\,b \equiv -f(2\,a - b).$$

n tire donc de l'équation (3)

$$a - 2\,b \equiv f\,\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n},$$

u bien, vu qu'ici $f \equiv 2^n$,

$$^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{1.2.3\dots n} \pmod p.$$

Des équations $a \equiv 2$ et $b \equiv 0 \pmod 3$ on conclut en outre

$$^b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad c \equiv 1 \pmod 3.$$

III. $\quad a$ et b sont impairs.

Dans ce dernier cas on a

$$16\,p = (2\,a + 2\,b)^2 + 3\,(2\,a - 2\,b)^2,$$

u bien

$$p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

te qu'on peut prendre

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

tire maintenant de l'équation (6) $a + b \equiv -f^2(2a - b)$; l'équa-
3) donne donc

$$a + b \equiv f^2 \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \pmod{p}.$$

comme en ce cas $2^n \equiv f^2$, il s'ensuit que

$$\ldots \quad c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \pmod{p},$$

qu'on voit aisément

$$\ldots\ldots\ldots \quad c \equiv 1 \pmod{3}.$$

équations (4^a), (4^b), (4^c), (5^a), (5^b) et (5^c) font voir qu'on a dans
es cas

$$\ldots \quad c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \pmod{p}$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad c \equiv 1 \pmod{3},$$

fournit le théorème énoncé plus haut.

peut donner encore une autre forme à la congruence (4). Comme
pair, on peut remplacer ce nombre par $2m$; alors

$$c \equiv 2^{2m-1} \frac{(2m+1)(2m+2)\ldots(4m)}{1.2.3\ldots(2m)}.$$

on a

$$2m + 1 \equiv -(4m),\ 2m + 3 \equiv -(4m-2),$$
$$2m + 5 \equiv -(4m-4)\ldots \text{etc.}$$

aide de ces équations on obtient

$$c \equiv (-1)^m 2^{2m-1} \frac{[(2m+2)(2m+4)\ldots(4m)]^2}{1.2.3\ldots(2m)},$$

n, après une réduction facile,

$$c \equiv (-1)^m 2^{4m-1} \frac{(m+1)(m+2)\ldots(2m)}{1.2.3\ldots m}.$$

On a de plus

$$2^{3m} = 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

et

$$\frac{p^2-1}{8} = \frac{9m^2+3m}{2}.$$

Retranchant de cet exponent le nombre pair $\frac{8m^2+4m}{2}$, on peut écrire plus simplement

$$2^{3m} \equiv (-1)^{\frac{m^2-m}{2}},$$

donc enfin

$$7) \;.\; c \equiv (-1)^{\frac{m^2+m}{2}} 2^{m-1} \frac{(m+1)(m+2)\dots(2m)}{1.2.3\dots m} \quad (\mathrm{mod}\, p = 6m+1)$$

Cette dernière congruence qui détermine le nombre c a été donnée sans preuve par Oltramare dans le 87ième tome des Comptes rendus de l'Acad. d. Sc., p. 735, en même temps que d'autres formules analogues. Mais cet auteur n'a pas déterminé le signe de c.

XXVI.

arlem, Arch Néerl. Sci. Soc Holl., 19, 1884, 372—390.)

ote sur le déplacement d'un système invariable dont un point est fixe.

On sait depuis Euler que ce déplacement se ramène toujours rotation autour d'un axe qui reste fixe.

ieurs auteurs ont établi ce théorème d'une manière purement ique; je citerai en particulier Duhamel, qui a traité de ce dans l'introduction de son Cours de mécanique.

e reviens sur cette matière, c'est pour mettre en lumière une lté inhérente à l'analyse suivie par Duhamel. On verra en effet s formules données par cet auteur pour déterminer la position ke de rotation, cessent de donner cette position dans un cas est cependant parfaitement déterminée — je parle du cas où lacement se ramène à une rotation de 180°.

O le point fixe, Ox, Oy, Oz les axes d'un système de coordon- ectangulaires fixe dans l'espace, Ox_1, Oy_1, Oz_1 ceux d'un système rdonnées rectangulaires lié au système invariable. Les cosinus gles que forment entre eux les axes de ces deux systèmes de nnées rectangulaires se trouvent réunis dans le tableau

	x_1	y_1	z_1
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

(A)

Ces valeurs se rapportent à la première position du système in-
ariable. Pour la seconde position nous écrirons $a+\Delta a$, $b+b\Delta$,
. ., $c''+\Delta c''$ au lieu de a, $b, \ldots, c''$.

Nous supposons qu'on peut faire coïncider les directions positives
es x_1, y_1, z_1 avec celles des x, y, z; on sait qu'alors le détermi-
ant formé avec les neuf quantités a, b, ..., c'' du tableau (A) est
gal à $+1$.

Je rappelle quelques relations entre ces diverses quantités :

$$a = b'c'' - b''c',$$
$$1 = a^2 + a'^2 + a''^2,$$
$$0 = ab + a'b' + a''b''.$$

Pour abréger, je ferai usage d'un signe sommatoire Σ qui aura
pport à trois termes, que l'on déduit de celui qui est écrit en
ettant l'accent simple et double; p. e., les deux dernières re-
tions sont $1 = \Sigma a^2$, $0 = \Sigma ab$. Un chiffre placé à la suite d'une
rmule indiquera le nombre total de formules analogues qu'on peut
déduire par un changement, soit des lettres a, b, c, soit des
ccents.

Il est clair qu'on a entre les quantités $a+\Delta a$, ..., $c''+\Delta c''$ les
êmes relations qu'entre a, b, ..., c''. En combinant ces diverses
lations on peut en déduire un grand nombre d'autres; je réunis
i quelques relations simples dont nous aurons surtout besoin

) . . . . . $a = b'c'' - b''c',$ [9]

) . . . . . $2\,\Sigma a\,\Delta a + \Sigma \Delta a^2 = 0,$ [3]

) . . . . . $\Sigma a\,\Delta b + \Sigma b\,\Delta a + \Sigma \Delta a\,\Delta b = 0.$ [3]

Existence et détermination de l'axe de rotation.

2. Cela posé, les relations

) . . . . $\begin{cases} x = a x_1 + b y_1 + c z_1, \\ y = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\ z = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1, \end{cases}$

ombinées avec les équations analogues pour la seconde position du
stème, donnent

$$
\ldots \quad \begin{cases} \Delta x = x_1 \Delta a + y_1 \Delta b + z_1 \Delta c, \\ \Delta y = x_1 \Delta a' + y_1 \Delta b' + z_1 \Delta c', \\ \Delta z = x_1 \Delta a'' + y_1 \Delta b'' + z_1 \Delta c'', \end{cases}
$$

gnant par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les coordonnées du point ré après le déplacement. Voyons maintenant s'il y a des points nt pas changé de position; on devra avoir

$$
\ldots \quad \begin{cases} 0 = x_1 \Delta a + y_1 \Delta b + z_1 \Delta c, \\ 0 = x_1 \Delta a' + y_1 \Delta b' + z_1 \Delta c', \\ 0 = x_1 \Delta a'' + y_1 \Delta b'' + z_1 \Delta c''. \end{cases}
$$

u'il soit possible de satisfaire à ces relations par des valeurs y_1, z_1 qui ne sont pas toutes égales à zéro, il faut et il suffit déterminant

$$
\ldots \quad D = \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & \Delta c \\ \Delta a' & \Delta b' & \Delta c' \\ \Delta a'' & \Delta b'' & \Delta c'' \end{vmatrix} .
$$

al à zéro. Si cette condition est remplie, les trois plans re- és par les équations (6) passent par une même ligne, l'axe ion, dont la position est parfaitement déterminée, du moins que les neuf mineurs du second degré de D ne sont pas tous à zéro.

osition I.

terminant D est toujours égal à zéro.

sition II.

neuf mineurs du second degré de D sont tous égaux à zéro, nt dans le cas qu'on a $\Delta a = 0$, $\Delta b = 0$, ..., $\Delta c'' = 0$, dire quand il n'y a pas de déplacement.

gnons par D_a, D_b, ..., $D_{c''}$ les mineurs de D, en sorte qu'on a

$$
\ldots \quad \begin{cases} D = \Sigma \Delta a D_a = \Sigma \Delta b D_b = \Sigma \Delta c D_c \\ 0 = \Sigma \Delta a D_b = \Sigma \Delta b D_c = \Sigma \Delta c D_a. \end{cases}
$$

eur de D_a est $\Delta b' \Delta c'' - \Delta b'' \Delta c'$, mais l'équation (1) donne

$$
= b' \Delta c'' - b'' \Delta c' + c'' \Delta b' - c' \Delta b'' + \Delta b' \Delta c'' - \Delta b'' \Delta c',
$$

$$
{}_a = \Delta a - b' \Delta c'' + b'' \Delta c' - c'' \Delta b' + c' \Delta b'', \qquad [3]
$$

$$
{}_{a'} = \Delta a' - b'' \Delta c + b \Delta c'' - c \Delta b'' + c'' \Delta b, \qquad [3]
$$

$$
{}_{a''} = \Delta a'' - b \Delta c' + b' \Delta c - c' \Delta b + c \Delta b'. \qquad [3]
$$

On en déduit, en multipliant par Δa, $\Delta a'$, $\Delta a''$ et faisant l'addition

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad D = \Sigma \Delta a^2 - \Sigma b D_b - \Sigma c D_c. \qquad [3]$$

Mais en multipliant les équations (9) par a, a', a'' on trouvera par ddition, en vertu des relations (1)

$$\Sigma a D_a = \Sigma a \Delta a - \Sigma b \Delta b - \Sigma c \Delta c,$$

u bien, à cause de (2)

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \Sigma a D_a = -\frac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 + \frac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 + \frac{1}{2} \Sigma \Delta c^2, \\ \Sigma b D_b = +\frac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 - \frac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 + \frac{1}{2} \Sigma \Delta c^2, \\ \Sigma c D_c = +\frac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 + \frac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 - \frac{1}{2} \Sigma \Delta c^2. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs de $\Sigma b D_b$, $\Sigma c D_c$ dans l'équation (10) on btient

$$D = 0, \qquad c.q.f.d.$$

es équations (11), qui donnent

$$(12) \quad . \quad \Sigma a D_a + \Sigma b D_b + \Sigma c D_c = \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta a^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta b^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma \Delta c^2,$$

nt bien voir qu'en supposant $D_a = D_b = \ldots = D_{c''} = 0$ on doit avoir: $\Delta a^2 = 0$, $\Sigma \Delta b^2 = 0$, $\Sigma \Delta c^2 = 0$, donc $\Delta a = \Delta b = \ldots = \Delta c'' = 0$, ce ui est notre proposition II.

D'après la démonstration qui précède, il est bien évident que la roposition I est une conséquence nécessaire des relations auxquelles s quantités

$$\begin{array}{lll} a\,,\ b\,,\ c & & a + \Delta a\,,\ b + \Delta b\,,\ c + \Delta c \\ a',\ b',\ c' & \text{et} & a' + \Delta a',\ b' + \Delta b',\ c' + \Delta c' \\ a'',\ b'',\ c'' & & a'' + \Delta a'',\ b'' + \Delta b'',\ c'' + \Delta c'' \end{array}$$

nt soumises, en sorte que cette proposition reste vraie quelles que ient ces quantités, réelles ou non. La proposition II, au contraire, t démontrée seulement en supposant réelles les quantités Δa, Δb, . ., $\Delta c''$. Nous reviendrons plus tard sur cette proposition II, pour ire voir qu'elle aussi est une conséquence des relations entre les ..., c'', $\Delta a, \ldots, \Delta c''$ et ne dépend nullement de la réalité de ces dernières quantités.

près ce qui précède, l'axe de rotation est parfaitement déter-
par

$$\ldots \left\{ \begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 &= D_a : D_b : D_c \\ &= D_{a'} : D_{b'} : D_{c'} \\ &= D_{a''} : D_{b''} : D_{c''} \end{aligned} \right.$$

te détermination devient illusoire seulement quand il n'y a pas de
cement. Ajoutons encore les relations suivantes, qui nous se-
utiles plus tard et que l'on obtient sans difficulté en partant
quations (9) et faisant attention aux relations (3)

$$\ldots \quad \Sigma\, b\, D_a = \Sigma\, a\, D_b = -\Sigma\, \Delta a\, \Delta b. \qquad [3]$$

obtient encore une expression remarquable pour la somme
$+\Sigma D_b^2 + \Sigma D_c^2$. En effet, on a d'après (11) et (14)

$$\begin{aligned} \Sigma\, a\, D_a &= -A + B + C, \\ \Sigma\, b\, D_a &= -\Sigma\, \Delta a\, \Delta b, \\ \Sigma\, c\, D_a &= -\Sigma\, \Delta a\, \Delta c, \end{aligned}$$

i posé, pour abréger, $\frac{1}{2} \Sigma\, \Delta a^2 = A$, $\frac{1}{2} \Sigma\, \Delta b^2 = B$, $\frac{1}{2} \Sigma\, \Delta c^2 = C$.
omme des carrés de ces trois équations donne

$$\Sigma\, D_a^2 = (-A + B + C)^2 + (\Sigma\, \Delta a\, \Delta b)^2 + (\Sigma\, \Delta a\, \Delta c)^2.$$

n a, d'après une transformation bien connue

$$\begin{aligned} 4\,A\,B &= \Sigma\, \Delta a^2 \times \Sigma\, \Delta b^2 = (\Sigma\, \Delta a\, \Delta b)^2 + D_c^2 + D_{c'}^2 + D_{c''}^2 \\ 4\,A\,C &= \Sigma\, \Delta a^2 \times \Sigma\, \Delta c^2 = (\Sigma\, \Delta a\, \Delta c)^2 + D_b^2 + D_{b'}^2 + D_{b''}^2, \end{aligned}$$

$$\Sigma\, D_a^2 + \Sigma\, D_b^2 + \Sigma\, D_c^2 = (A + B + C)^2,$$

à-dire

$$\ldots \quad \Sigma\, D_a^2 + \Sigma\, D_b^2 + \Sigma\, D_c^2 = \tfrac{1}{4} [\Sigma\, \Delta a^2 + \Sigma\, \Delta b^2 + \Sigma\, \Delta c^2]^2.$$

Autre formule pour déterminer l'axe de rotation.

D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} D = \Delta a\, D_a + \Delta b\, D_b + \Delta c\, D_c &= 0, \\ \Delta a'\, D_a + \Delta b'\, D_b + \Delta c'\, D_c &= 0, \\ \Delta a''\, D_a + \Delta b''\, D_b + \Delta c''\, D_c &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant ces équations par $c + \frac{1}{2}\Delta c$, $c' + \frac{1}{2}\Delta c'$, $c'' + \frac{1}{2}\Delta c''$ la
antité D_c se trouvera éliminée après l'addition, en vertu des re-
ions (2). En posant donc

$$6)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{aligned} p &= \Sigma(c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta b = -\Sigma(b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta c \\ q &= \Sigma(a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta c = -\Sigma(c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta a \\ r &= \Sigma(b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta a = -\Sigma(a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta b \end{aligned}\right.$$

obtient $-q D_a + p D_b = 0$ ou $D_a : D_b = p : q$. En réunissant toutes
s relations de même nature, on trouve

$$7)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{aligned} p : q : r &= D_a : D_b : D_c \\ &= D_{a'} : D_{b'} . D_{c'} \\ &= D_{a''} : D_{b''} : D_{c''} . \end{aligned}\right.$$

Par conséquent la formule (13), qui détermine l'axe de rotation,
ut se mettre sous la forme

$$8)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad x_1 : y_1 : z_1 = p : q : r.$$

C'est la formule donnée par Duhamel. Elle devient illusoire quand
a à la fois $p = 0$, $q = 0$ et $r = 0$. Nous verrons que cela a lieu
n seulement quand il n'y a pas de déplacement, mais encore dans
autres cas. Alors cette formule (18) devient insuffisante et il faut
courir aux formules (13). Nous allons déduire maintenant un système
formules qui nous permettra de dire avec précision dans quels
s on a : $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

4. Nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= (a + \tfrac{1}{2}\Delta a)\Delta a + (a' + \tfrac{1}{2}\Delta a')\Delta a' + (a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'')\Delta a'' \\ +r &= (b + \tfrac{1}{2}\Delta b)\Delta a + (b' + \tfrac{1}{2}\Delta b')\Delta a' + (b'' + \tfrac{1}{2}\Delta b'')\Delta a'' \\ -q &= (c + \tfrac{1}{2}\Delta c)\Delta a + (c' + \tfrac{1}{2}\Delta c')\Delta a' + (c'' + \tfrac{1}{2}\Delta c'')\Delta a''. \end{aligned}$$

1 éliminant $\Delta a'$, $\Delta a''$ il vient

$$9)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad R\,\Delta a = r R_b - q R_c \qquad [9]$$

désignant par R le déterminant

$$0)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad R = \begin{vmatrix} a + \frac{1}{2}\Delta a & b + \frac{1}{2}\Delta b & c + \frac{1}{2}\Delta c \\ a' + \frac{1}{2}\Delta a' & b' + \frac{1}{2}\Delta b' & c' + \frac{1}{2}\Delta c' \\ a'' + \frac{1}{2}\Delta a'' & b'' + \frac{1}{2}\Delta b'' & c'' + \frac{1}{2}\Delta c'' \end{vmatrix}$$

par $R_a, R_b, \ldots, R_{c''}$ les mineurs du second degré de R.

a valeur de R_a est $(b' + \frac{1}{2}\Delta b')(c'' + \frac{1}{2}\Delta c'') - (b'' + \frac{1}{2}\Delta b'')(c' + \frac{1}{2}\Delta c')$
opérant les multiplications on peut simplifier le résultat à l'aide
a relation (1) et de la valeur de Δa qu'on en tire; on trouvera

$$R_a = a + \tfrac{1}{2}\Delta a - \tfrac{1}{4}(\Delta b' \Delta c'' - \Delta b'' \Delta c'),$$

d.

$$\ldots\ldots\ R_a = a + \tfrac{1}{2}\Delta a - \tfrac{1}{4} D_a. \qquad [9]$$

n en tire aussitôt

$$\ldots\ldots\ \Sigma R_a \Delta a = 0, \qquad [3]$$
$$\ldots\ldots\ \Sigma R_a \Delta b = -r, \qquad [3]$$
$$\ldots\ldots\ \Sigma R_a \Delta c = +q. \qquad [3]$$

uation (19) donne ensuite

$$R\,\Sigma\Delta a^2 = r\,\Sigma R_b \Delta a - q\,\Sigma R_c \Delta a,$$
$$R\,\Sigma\Delta a \Delta b = r\,\Sigma R_b \Delta b - q\,\Sigma R_c \Delta b,$$

-à-dire, en vertu des relations (22), (23), (24)

$$\ldots \left\{\begin{array}{ll} R\,\Sigma\Delta a^2 = q^2 + r^2, & R\,\Sigma\Delta a \Delta b = -pq, \\ R\,\Sigma\Delta b^2 = r^2 + p^2, & R\,\Sigma\Delta b \Delta c = -qr, \\ R\,\Sigma\Delta c^2 = p^2 + q^2, & R\,\Sigma\Delta c \Delta a = -rp, \end{array}\right.$$

bien, en faisant attention aux formules (11) et (14)

$$\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} p^2 = R\,\Sigma a D_a, \\ q^2 = R\,\Sigma b D_b, \\ r^2 = R\,\Sigma c D_c. \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} qr = R\,\Sigma b D_c = R\,\Sigma c D_b, \\ rp = R\,\Sigma c D_a = R\,\Sigma a D_c, \\ pq = R\,\Sigma a D_b = R\,\Sigma b D_a. \end{array}\right.$$

ous pouvons maintenant exprimer aussi les $D_a, \ldots, D_{c''}$ à l'aide
, q, r; — en effet, les formules

$$R(a D_a + a' D_{a'} + a'' D_{a''}) = p^2,$$
$$R(b D_a + b' D_{a'} + b'' D_{a''}) = pq,$$
$$R(c D_a + c' D_{a'} + c'' D_{a''}) = pr$$

nent aussitôt la première des neuf équations

) . $$\begin{cases} \mathrm{R\,D}_a = p(a\,p + b\,q + c\,r), & \mathrm{R\,D}_b = q(a\,p + b\,q + c\,r), \\ \mathrm{R\,D}_{a'} = p(a'p + b'q + c'r), & \mathrm{R\,D}_{b'} = q(a'p + b'q + c'r), \\ \mathrm{R\,D}_{a''} = p(a''p + b''q + c''r), & \mathrm{R\,D}_{b''} = q(a''p + b''q + c''r), \\ & \mathrm{R\,D}_c = r(a\,p + b\,q + c\,r), \\ & \mathrm{R\,D}_{c'} = r(a'p + b'q + c'r), \\ & \mathrm{R\,D}_{c''} = r(a''p + b''q + c''r). \end{cases}$$

après la définition des $\mathrm{R}_a, \ldots, \mathrm{R}_{c''}$, on a $\mathrm{R} = \Sigma(a + \frac{1}{2}\Delta a)\mathrm{R}_a$, ou en, à cause de (22), $\mathrm{R} = \Sigma a \mathrm{R}_a$. En substituant la valeur (21) de il vient

$$\mathrm{R} = 1 + \tfrac{1}{2}\Sigma a \Delta a - \tfrac{1}{4}\Sigma a \mathrm{D}_a = 1 - \tfrac{1}{4}\Sigma \Delta a^2 - \tfrac{1}{4}\Sigma a \mathrm{D}_a,$$

bien, parce que les relations (11) donnent $\Sigma \Delta a^2 = \Sigma b \mathrm{D}_b + \Sigma c \mathrm{D}_c$,

) . . . . $$\mathrm{R} = 1 - \tfrac{1}{4}\Sigma a \mathrm{D}_a - \tfrac{1}{4}\Sigma b \mathrm{D}_b - \tfrac{1}{4}\Sigma c \mathrm{D}_c.$$

n tire des équations (26)

$$p^2 + q^2 + r^2 = \mathrm{R}(\Sigma a \mathrm{D}_a + \Sigma b \mathrm{D}_b + \Sigma c \mathrm{D}_c);$$

facteur de R dans le second membre est égal à $4(1 - \mathrm{R})$ d'après), donc

) . . . . $$p^2 + q^2 + r^2 = 4\,\mathrm{R}(1 - \mathrm{R}).$$

La relation (21) donne encore $\Sigma b \mathrm{R}_a = \frac{1}{2}\Sigma b \Delta a - \frac{1}{4}\Sigma b \mathrm{D}_a$, ou bien, cause de (14): $\Sigma b \mathrm{R}_a = \frac{1}{2}\Sigma b \Delta a + \frac{1}{4}\Sigma \Delta a \Delta b$, c'est-à-dire: $\Sigma b \mathrm{R}_a = \frac{1}{2} r$. obtient de la même manière

) . . . . $$\begin{cases} p = 2\,\Sigma c \mathrm{R}_b = -2\,\Sigma b \mathrm{R}_c, \\ q = 2\,\Sigma a \mathrm{R}_c = -2\,\Sigma c \mathrm{R}_a, \\ r = 2\,\Sigma b \mathrm{R}_a = -2\,\Sigma a \mathrm{R}_b. \end{cases}$$

s équations

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{R}_a + a'\mathrm{R}_{a'} + a''\mathrm{R}_{a''} &= \mathrm{R}, \\ b\,\mathrm{R}_a + b'\mathrm{R}_{a'} + b''\mathrm{R}_{a''} &= \tfrac{1}{2} r, \\ c\,\mathrm{R}_a + c'\mathrm{R}_{a'} + c''\mathrm{R}_{a''} &= -\tfrac{1}{2} q \end{aligned}$$

nnent maintenant la première des neuf relations

) . $$\begin{cases} \mathrm{R}_a = a\,\mathrm{R} + \frac{1}{2}(b\,r - c\,q), & \mathrm{R}_b = b\,\mathrm{R} + \frac{1}{2}(c\,p - a\,r), \\ \mathrm{R}_{a'} = a'\mathrm{R} + \frac{1}{2}(b'r - c'q), & \mathrm{R}_{b'} = b'\mathrm{R} + \frac{1}{2}(c'p - a'r), \\ \mathrm{R}_{a''} = a''\mathrm{R} + \frac{1}{2}(b''r - c''q), & \mathrm{R}_{b''} = b''\mathrm{R} + \frac{1}{2}(c''p - a''r), \\ & \mathrm{R}_c = c\,\mathrm{R} + \frac{1}{2}(a\,q - b\,p), \\ & \mathrm{R}_{c'} = c'\mathrm{R} + \frac{1}{2}(a'q - b'p), \\ & \mathrm{R}_{c''} = c''\mathrm{R} + \frac{1}{2}(a''q - b''p). \end{cases}$$

somme des carrés des mêmes équations donne

$$\Sigma R_a^2 = R^2 + \tfrac{1}{4} q^2 + \tfrac{1}{4} r^2, \qquad [3]$$

:

$$\Sigma R_a^2 + \Sigma R_b^2 + \Sigma R_c^2 = 3 R^2 + \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2),$$

-à dire, en vertu de (30)

$$\ldots\ldots\ldots \Sigma R_a^2 + \Sigma R_b^2 + \Sigma R_c^2 = R^2 + 2 R.$$

Revenons maintenant à la proposition II, qui a été démontrée ement en supposant Δa, Δb, ..., $\Delta c''$ réels Faisons donc: $= D_b = \ldots = D_{c''} = 0$ et voyons ce qui s'en suit Les équations (29) 6) donnent: $R = 1$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$. Ensuite les équations (19)

$$\Delta a = 0, \ \Delta b = 0, \ \ldots, \ \Delta c'' = 0.$$

omme nous l'avons déjà annoncé cette proposition II ne dépend : en aucune façon de la réalité des quantités $\Delta a, \ldots, \Delta c''$.

Voyons maintenant dans quels cas la formule (18) cesse de rminer l'axe de rotation, c'est-à-dire dans quels cas on a $p = 0$, 0, $r = 0$. La formule (30) fait voir que R est égal à l'unité ou éro.

remier cas: $R = 1$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

es relations (28) font voir que tous les $D_a, \ldots, D_{c''}$ deviennent égaux éro, d'après la proposition II, il s'ensuit que tous les $\Delta a, \ldots, \Delta c''$: aussi égaux à zéro: il n'y a pas de déplacement. L'indétermi- on de l'axe de rotation dans ce cas est aussi annoncée par uation (13), elle est dans la nature des choses. Les quatre équa- s $R = 1$, $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ vérifiant la relation (30) équivalent rois conditions, qui suffisent à déterminer le déplacement, qui nul, comme on l'a vu. En effet, la condition $R = 1$ donne bien $- q^2 + r^2 = 0$, mais algébriquement cela n'entraîne nullement 0, $q = 0$, $r = 0$, bien que cela ait lieu en admettant seulement valeurs réelles. P. e., supposons que le tableau (A) soit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{et après le déplacement} \quad \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} i & i \\ \frac{1}{2} i & \frac{1}{2} & -1 \\ -i & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta a = \tfrac{1}{2}, && \Delta b = \tfrac{1}{2} i, && \Delta c = i,\\
&\Delta a' = \tfrac{1}{2} i, && \Delta b' = -\tfrac{1}{2}, && \Delta c' = -1,\\
&\Delta a'' = -i, && \Delta b'' = 1, && \Delta c'' = 0.
\end{aligned}$$

on trouvera $R=1$, $p=1$, $q=i$, $r=0$.

Il en est tout autrement dans le

Second cas: $R=0$, $p=0$, $q=0$, $r=0$.

En effet, les équations (26) montrent que la condition $R=0$ entraîne déjà ces trois autres: $p=0$, $q=0$, $r=0$. Ce second cas est donc caractérisé par la condition unique $R=0$, qui ne peut pas déterminer le déplacement, qu'on peut au contraire assujettir encore à deux autres conditions.

Pour reconnaître la signification de cette condition $R=0$, il faut se reporter aux équations (4) et (5), qui donnent

$$\begin{aligned}
x+\tfrac{1}{2}\Delta x &= (a+\tfrac{1}{2}\Delta a)x_1+(b+\tfrac{1}{2}\Delta b)y_1+(c+\tfrac{1}{2}\Delta c)z_1,\\
y+\tfrac{1}{2}\Delta y &= (a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')y_1+(b'+\tfrac{1}{2}\Delta b')y_1+(c'+\tfrac{1}{2}\Delta c')z_1,\\
z+\tfrac{1}{2}\Delta z &= (a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')z_1+(b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'')y_1+(c''+\tfrac{1}{2}\Delta c'')z_1.
\end{aligned}$$

On voit par là que $R=0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible de satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned}
x+\tfrac{1}{2}\Delta x&=0,\\
y+\tfrac{1}{2}\Delta y&=0,\\
z+\tfrac{1}{2}\Delta z&=0,
\end{aligned}$$

par des valeurs de x_1, y_1, z_1 qui ne sont pas toutes nulles. Pour tous les points d'une certaine droite passant par l'origine on a alors $x+\Delta x=-x$, $y+\Delta y=-y$, $z+\Delta z=-z$, c'est-à-dire, après le déplacement cette droite se retrouve dans sa première position, avec superposition des deux moitiés différentes. Or une considération géométrique bien simple montre que le déplacement consiste alors dans une rotation de 180° autour d'un certain axe, et que toutes les droites passant par l'origine et situées dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation jouissent de la propriété énoncée. Ainsi, lorque $R=0$, les trois plans

$$\begin{aligned}
(a+\tfrac{1}{2}\Delta a)x_1+(b+\tfrac{1}{2}\Delta b)y_1+(c+\tfrac{1}{2}\Delta c)z_1&=0,\\
(a'+\tfrac{1}{2}\Delta a')x_1+(b'+\tfrac{1}{2}\Delta b')y_1+(c'+\tfrac{1}{2}\Delta c')z_1&=0,\\
(a''+\tfrac{1}{2}\Delta a'')x_1+(b''+\tfrac{1}{2}\Delta b'')y_1+(c''+\tfrac{1}{2}\Delta c'')z_1&=0
\end{aligned}$$

nt non seulement par une même droite, mais ces trois plans dent avec un plan mené par l'origine perpendiculairement à de rotation Autrement, et dans le langage de l'algèbre nous ns énoncer cette:

position III. Lorsque le déterminant R est égal à zéro, ces mineurs R_a, R_b, ..., $R_{c''}$ s'évanouissent en même temps

effet, la supposition $R=0$ donne $p=0$, $q=0$, $r=0$, et dès es équations (32) mettent en évidence notre proposition. Cette nstration, on le voit, ne dépend nullement de la réalité des ités $a, b, \ldots, \Delta a, \Delta b, \ldots$, comme la considération géométrique ous a conduit d'abord à cette proposition. Dans le cas actuel, ation (21) donne encore: $D_a = 4(a+\frac{1}{2}\Delta a)$ etc., en sorte que tion (13) de l'axe de rotation peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} x_1 : y_1 : z_1 &= a + \tfrac{1}{2}\Delta a : b + \tfrac{1}{2}\Delta b : c + \tfrac{1}{2}\Delta c, \\ &= a' + \tfrac{1}{2}\Delta a' : b' + \tfrac{1}{2}\Delta b' : c' + \tfrac{1}{2}\Delta c', \\ &= a'' + \tfrac{1}{2}\Delta a'' : b'' + \tfrac{1}{2}\Delta b'' : c'' + \tfrac{1}{2}\Delta c'', \end{aligned}\right.$$

i est bien conforme à ce que nous venons de dire.

'y a pas lieu de s'occuper du sens de la rotation, parce qu'une n de 180° dans l'un ou l'autre sens produit le même effet.

Après avoir traité complètement le cas $p=0$, $q=0$, $r=0$ en ferons abstraction dans la suite, et par conséquent l'axe tation sera déterminé par l'équation (18). Il nous reste à déter- l'amplitude et le sens de la rotation qui permet de passer de mière position du système invariable à la seconde position.

Θ l'amplitude de la rotation; comme une rotation Θ dans ns produit le même effet qu'une rotation $360°-\Theta$ effectuée le sens contraire, nous pouvons supposer la valeur absolue inférieure à 180°. Prenons un point arbitraire P sur l'axe tation et une droite OQ perpendiculaire à OP et liée au ne invariable. Pour amener la droite OQ dans sa position finale, la tourner d'un angle $\Theta < 180°$ autour de OP, dans un certain Supposons que par une rotation de 90° dans le même sens, ite OQ vienne dans la position OR. Alors nous conviendrons nsidérer l'angle Θ comme positif ou négatif selon que les trois

lroites OP, OQ, OR ont ou n'ont pas la même disposition que les ıxes Ox, Oy, Oz. Nous avons pris arbitrairement la direction OP ur l'axe de rotation On voit qu'en prenant la direction opposée, e signe de Θ change.

Supposons OQ égal à l'unité et OQ' la position finale de OQ, on voit immédiatement que

$$QQ'^2 = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} \Theta,$$

et cette équation détermine complètement la valeur absolue de Θ

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de Q par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1. Les équations (5) donnent

$$\begin{aligned} QQ'^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = x_1^2 \Sigma \Delta a^2 &+ 2 y_1 z_1 \Sigma \Delta b \Delta c \\ + y_1^2 \Sigma \Delta b^2 &+ 2 z_1 x_1 \Sigma \Delta c \Delta a \\ + z_1^2 \Sigma \Delta c^2 &+ 2 x_1 y_1 \Sigma \Delta a \Delta b. \end{aligned}$$

En multipliant par R nous trouvons, en faisant attention aux relations (25)

$$\begin{aligned} R(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = (q^2 + r^2) x_1^2 &- 2 q r y_1 z_1 \\ + (r^2 + p^2) y_1^2 &- 2 r p z_1 x_1 \\ + (p^2 + q^2) z_1^2 &- 2 p q x_1 y_1 = \\ (p^2 + q^2 + r^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) &- (p x_1 + q y_1 + r z_1)^2. \end{aligned}$$

Mais on a $p x_1 + q y_1 + r z_1 = 0$, à cause de la perpendicularité de OP et OQ, et $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$; donc

$$4 R \sin^2 \tfrac{1}{2} \Theta = p^2 + q^2 + r^2 = 4 R (1 - R).$$

Nous arrivons donc à l'expression suivante, qui détermine la valeur absolue de Θ

$$(35) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} \Theta = 1 - R.$$

Il faut encore déterminer le signe de Θ. Pour cela, soit $OP = 1$, et soient

$$\begin{matrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & X_3, & Z_3 \end{matrix}$$

les coordonnées de P, Q, Q' par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 (dans leur position initiale). Le déterminant

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

alors égal en valeur absolue au sextuple de la pyramide $OPQQ'$, -à-dire égal à $\pm \sin\Theta$, et, d'après la manière dont nous déterons le signe de Θ, le signe de ces deux expressions est encore nême, donc

$$\sin\Theta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 - X_2 & Y_3 - Y_2 & Z_3 - Z_2 \end{vmatrix}$$

$$\sin\Theta = (X_3 - X_2)(Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) + (Y_3 - Y_2)(Z_1 X_2 - Z_2 X_1) \\ + (Z_3 - Z_2)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1).$$

en posant $S = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, on aura $X_1 = \frac{p}{S}$, $Y_1 = \frac{q}{S}$, $Z_1 = \frac{r}{S}$.

)n peut prendre arbitrairement S positif ou négatif, il faut seuent conserver dans la suite la valeur adoptée.

:nsuite $X_3 - X_2$, $Y_3 - Y_2$, $Z_3 - Z_2$ sont évidemment les projections les axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 de la ligne QQ'. Or on connaît, par les nules (5), les projections de QQ' sur les axes Ox, Oy, Oz; on en clut

$$\begin{aligned} X_3 - X_2 &= X_2 \Sigma a \Delta a + Y_2 \Sigma a \Delta b + Z_2 \Sigma a \Delta c, \\ Y_3 - Y_2 &= X_2 \Sigma b \Delta a + Y_2 \Sigma b \Delta b + Z_2 \Sigma b \Delta c, \\ Z_3 - Z_2 &= X_2 \Sigma c \Delta a + Y_2 \Sigma c \Delta b + Z_2 \Sigma c \Delta c. \end{aligned}$$

on trouve facilement, à l'aide des équations (2), (16), (25)

$$\ldots\ldots\ldots \begin{cases} R \Sigma a \Delta a = -\frac{1}{2}(q^2 + r^2), \\ R \Sigma b \Delta b = -\frac{1}{2}(r^2 + p^2), \\ R \Sigma c \Delta c = -\frac{1}{2}(p^2 + q^2). \end{cases}$$

$$\ldots \begin{cases} R \Sigma b \Delta c = -Rp + \frac{1}{2} qr, & R \Sigma c \Delta b = +Rp + \frac{1}{2} qr, \\ R \Sigma c \Delta a = -Rq + \frac{1}{2} rp, & R \Sigma a \Delta c = +Rq + \frac{1}{2} rp, \\ R \Sigma a \Delta b = -Rr + \frac{1}{2} pq, & R \Sigma b \Delta a = +Rr + \frac{1}{2} pq. \end{cases}$$

introduisant ces valeurs et celles-ci: $X_1 = \frac{p}{S}$, $Y_1 = \frac{q}{S}$, $Z_1 = \frac{r}{S}$, ent

$$\begin{aligned}
\mathrm{RS}\sin\Theta = &\left[-\tfrac{1}{2}(q^2+r^2)\mathrm{X}_2 + (-\mathrm{R}r+\tfrac{1}{2}pq)\mathrm{Y}_2 + (\mathrm{R}q+\tfrac{1}{2}rp)\mathrm{Z}_2\right](q\mathrm{Z}_2 - r\mathrm{Y}_2)\\
&+\left[(\mathrm{R}r+\tfrac{1}{2}pq)\mathrm{X}_2 - \tfrac{1}{2}(r^2+p^2)\mathrm{Y}_2 + (-\mathrm{R}p+\tfrac{1}{2}qr)\mathrm{Z}_2\right](r\mathrm{X}_2 - p\mathrm{Z}_2)\\
&+\left[(-\mathrm{R}q+\tfrac{1}{2}rp)\mathrm{X}_2 + (\mathrm{R}p+\tfrac{1}{2}qr)\mathrm{Y}_2 - \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\mathrm{Z}_2\right](p\mathrm{Y}_2 - q\mathrm{X}_2).
\end{aligned}$$

En réduisant, le second membre devient divisible par R et l'on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\sin\Theta = &(q^2+r^2)\mathrm{X}_2^2 - 2qr\mathrm{Y}_2\mathrm{Z}_2\\
&+(r^2+p^2)\mathrm{Y}_2^2 - 2rp\mathrm{Z}_2\mathrm{X}_2\\
&+(p^2+q^2)\mathrm{Z}_2^2 - 2pq\mathrm{X}_2\mathrm{Y}_2
\end{aligned}$$

et comme tout à l'heure $\mathrm{S}\sin\Theta = p^2+q^2+r^2 = \mathrm{S}^2$; donc définitivement

(38) . . . . $\sin\Theta = \mathrm{S}.$

Les formules (35) et (38), c'est-à-dire

$$\sin\Theta = \mathrm{S},$$
$$\cos\Theta = 2\mathrm{R} - 1$$

donnent sans aucune ambiguïté l'angle de rotation Θ.

8. La position du système invariable dépend de trois paramètres. Par conséquent, on peut se proposer de déterminer la seconde position en connaissant la première position et les trois quantités p, q, r. Nous avons à exprimer $\Delta a, \ldots, \Delta c''$ à l'aide de p, q, r et de $a, b, c, \ldots, c''$. Les formules que nous avons développées donnent facilement la solution de ce problème. Remarquons d'abord que la quantité R se détermine à l'aide de la relation $p^2+q^2+r^2 = 4\mathrm{R}(1-\mathrm{R})$. On trouve deux valeurs de R qui se rapportent à deux rotations autour d'un même axe, mais dont les amplitudes sont supplémentaires. Les formules (19) et (32) donnent ensuite

(39) $\mathrm{R}\,\Delta a = \mathrm{R}(br - cq) + \tfrac{1}{2}p(ap+bq+cr) - \tfrac{1}{2}a(p^2+q^2+r^2).$ [9]

Voici une autre expression des $\Delta a, \ldots, \Delta c''$ qu'on obtient à l'aide de (21) et (32)

(40) . . . . $\Delta a = br - cq + \tfrac{1}{2}\mathrm{D}_a - 2a(1-\mathrm{R}).$ [9]

gnons par u, v, w les cosinus des angles que la direction OP e de rotation fait avec les axes $O x_1$, $O y_1$, $O z_1$, et par k, k', k'' inus des angles que la même direction fait avec les axes y, Oz; on aura, d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} p &= u \sin \Theta, & ap + bq + cr &= k \sin \Theta, \\ q &= v \sin \Theta, & a'p + b'q + c'r &= k' \sin \Theta, \\ r &= w \sin \Theta, & a''p + b''q + c''r &= k'' \sin \Theta. \end{aligned}$$

uations (28) prennent la forme simple

$$\begin{aligned} &(1 - \cos \Theta)\, u k, & D_b &= 2(1 - \cos \Theta)\, v k, & D_c &= 2(1 - \cos \Theta)\, w k, \\ &(1 - \cos \Theta)\, u k', & D_{b'} &= 2(1 - \cos \Theta)\, v k', & D_{c'} &= 2(1 - \cos \Theta)\, w k', \\ &(1 - \cos \Theta)\, u k'', & D_{b''} &= 2(1 - \cos \Theta)\, v k'', & D_{c''} &= 2(1 - \cos \Theta)\, w k'', \end{aligned}$$

ormules (40)

$$\Delta a = \sin \Theta\, (b w - c v) + (1 - \cos \Theta)(u k - a). \qquad [9]$$

es équations (13) et (18) sont celles de l'axe de rotation par aux axes $O x_1$, $O y_1$, $O z_1$. On obtient des équations aussi sim- rapport aux axes Ox, Oy, Oz. En effet, on a $x_1 = a x + a' y + a'' z$, $= x \Delta a + y \Delta a' + z \Delta a'' + a \Delta x + a' \Delta y + a'' \Delta z + \Delta a \Delta x + \Delta a' \Delta y$ Δz, et par conséquent l'axe de rotation est déterminé par

$$\begin{aligned} 0 &= x \Delta a + y \Delta a' + z \Delta a'', \\ 0 &= x \Delta b + y \Delta b' + z \Delta b'', \\ 0 &= x \Delta c + y \Delta c' + z \Delta c'', \end{aligned}$$

$$\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} x : y : z &= D_a : D_{a'} : D_{a''} \\ &= D_b : D_{b'} : D_{b''} \\ &= D_c : D_{c'} : D_{c''}. \end{aligned} \right.$$

oursuivant cette voie, il faudrait introduire, au lieu de p, q, r, tres quantités s, s', s'' par les équations

$$. \left\{ \begin{aligned} s &= S(a' + \tfrac{1}{2} \Delta a') \Delta a'' = - S(a'' + \tfrac{1}{2} \Delta a'') \Delta a', \\ s' &= S(a'' + \tfrac{1}{2} \Delta a'') \Delta a = - S(a + \tfrac{1}{2} \Delta a) \Delta a'', \\ s'' &= S(a + \tfrac{1}{2} \Delta a) \Delta a' = - S(a' + \tfrac{1}{2} \Delta a') \Delta a. \end{aligned} \right.$$

signe sommatoire S a rapport à trois termes qu'on déduit i qui est écrit en changeant a en b et en c.

L'axe de rotation est déterminé alors aussi par

$$x : y : z = s : s' : s''. \tag{43}$$

On obtient du reste un système de relations tout à fait semblable aux formules que nous avons déduites dans le n° 4; je crois inutile de m'y arrêter et je me contenterai de donner ces relations

$$\left\{\begin{aligned} s &= a p + b q + c r, & p &= a s + a' s' + a'' s'', \\ s' &= a' p + b' q + c' r, & q &= b s + b' s' + b'' s'', \\ s'' &= a'' p + b'' q + c'' r, & r &= c s + c' s' + c'' s''. \end{aligned}\right. \tag{44}$$

XXVII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 98, 1884, 663—664.)

---

r quelques applications arithmétiques de la théorie des fonctions elliptiques.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

viens de lire, dans les Comptes rendus, l'intéressant article de
lurwitz, qui m'a fait consulter de nouveau l'article de M. Liouville
érie, t. IV) M. Hurwitz a parfaitement raison en disant qu'une
des résultats que j'ai donnés se déduisent des théorèmes que
Liouville y donne. En effet, ces théorèmes ne sont autre chose
l'interprétation arithmétique de votre première formule

$$+ 2^2 q^{2^2} + 3^2 q^{3^2} + \dots$$
$$(1 - 2q + 2q^{2^2} + 2q^{3^2} + \dots)\left[\frac{q^1}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \dots\right]$$

vous savez que la déduction de cette relation

$$\mathrm{F}(4^k m) = 240\,[2f(k) - 1]\,\mathrm{B}(m) \qquad (m \equiv 1, \bmod 8)$$

peut tirer de là, et alors votre seconde formule

$$1^2 q^{\frac{1^2}{4}} + 3^2 q^{\frac{3^2}{4}} + 5^2 q^{\frac{5^2}{4}} + \dots$$
$$= \left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{3^2}{4}} + q^{\frac{5^2}{4}} + \dots\right)\left[1 + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \dots\right]$$

uelque théorème arithmétique équivalent) devient indispensable.
fin de son article, M. Liouville dit lui-même que ces théorèmes
ent lieu à quelques résultats curieux concernant la décomposition
inq carrés, et il exprime son intention d'exposer cela dans un
article; mais je ne crois pas qu'il ait publié cet article.
uand je me suis occupé de la décomposition en sept carrés, la

emière chose que j'ai tâché d'obtenir, c'étaient ces relations entre (4 m) et $F_7(m)$. J'avais mené a bonne fin cette recherche, mais je itais encore le besoin de revoir mes raisonnements et mes calculs orès cette revision, voici les résultats, qui ne sont guère plus npliqués que dans le cas de la décomposition en cinq carrés.

Soient $f(k)=\frac{40 . 32^k-9}{31}$, $g(k)=\frac{32^{k+1}-1}{31}$ et $F_7(n)$ le nombre total s décompositions de n en sept carrés, alors

$$\begin{aligned} F_7(4^k m) &= f(k)\, F_7(m) && (m\equiv 1 \text{ ou } 2, \bmod 4),\\ F_7(4^k m) &= g(k)\, F_7(m) && (m\equiv 3 \quad \bmod 8),\\ F_7(4^k m) &= \frac{28 f(k)+9}{37} F_7(m) && (m\equiv 7 \quad \bmod 8). \end{aligned}$$

Il serait intéressant de déduire ces relations encore des formules iptiques, mais je n'ai point sérieusement abordé cette question, ant abandonné ces recherches après quelques tentatives infructueus, et, pour le moment, d'autres travaux demandent tous mes efforts.

Mais voici encore un autre résultat, bien particulier certainement, quel conduit l'analyse des fonctions elliptiques.

Soit d un nombre parcourant les diviseurs impairs de n,

$$\psi(n)=\Sigma(-1)^{\frac{1}{2}(d-1)+\frac{1}{8}(d^2-1)}=\sum\left(\frac{-2}{d}\right) \quad \text{et} \quad \psi(0)=\tfrac{1}{2},$$

ors, dans le cas $n\equiv 2 \pmod 4$, on peut exprimer la fonction $F(n)$ de . Kronecker par la formule

$$F(n)=\tfrac{1}{2}\Sigma\psi(n-2r^2)=\Sigma\psi(n-8r^2) \qquad (r=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

l'aide de la méthode de M. Hurwitz, on peut tirer de là la valeur $F(2k^2)$, en sorte que la relation générale

$$F(np^{2k})=\left[p^k+p^{k-1}+\ldots+p+1-\left(\frac{-n}{p}\right)(p^{k-1}+\ldots+p+1)\right]F(n)$$

t vérifiée maintenant, dans les cas $n=k^2$, $n=2k^2$, à l'aide des rmules elliptiques.

XXVIII.

(Bul. Sci. math., Paris, sér. 2, 8; 1884, 175—176.)

Sur le caractère du nombre 2 comme résidu ou non-résidu quadratique.

Soit p un nombre premier impair et considérons la suite des -1 nombres

$$\text{(A)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 1, 2, 3, \ldots, p-1.$$

Jous dirons que deux nombres consécutifs k, $k+1$ présentent une ariation lorsque l'un d'eux est résidu, l'autre non-résidu quadra-que de p.

Cela posé, on voit facilement que le nombre total des variations ans la suite (A) est égal à $\frac{p-1}{2}$. En effet, deux nombres k, $k+1$, résentent une variation ou non, selon que le nombre r_k défini par

$$k+1 \equiv k r_k \pmod p$$

st non-résidu ou résidu. Mais il est évident que les nombres

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-2}$$

ont tous différents et qu'aucun d'eux n'est égal à l'unité, en sorte ue ces nombres sont

$$2, 3, 4, \ldots, p-1,$$

n faisant abstraction de l'ordre. Le nombre des non-résidus parmi ux, c'est-à-dire le nombre des variations dans la suite (A), est donc ien égal à $\frac{p-1}{2}$.

Supposons maintenant $p \equiv 1 \pmod 4$. Le nombre des variations dans a suite (A) étant pair, et le premier nombre 1 de cette suite étant

ésidu, il s'ensuit que le dernier $p-1$ ou -1 est aussi résidu. Deux ıombres k et $p-k$ sont donc en même temps résidus ou non-résidus: l'où il suit que le nombre des variations dans la suite

$$\text{B)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2}$$

st égal à $\frac{p-1}{4}=n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p\equiv 1 \pmod 8$, le dernier nombre $\frac{p-1}{2}$ era donc nécessairement résidu, et partant 2 est résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p\equiv 5 \pmod 8$, $\frac{p-1}{2}$ et 2 seront non-ésidus.

Soit en second lieu $p\equiv 3 \pmod 4$. Le nombre des variations dans suite (A) étant impair, $p-1$ ou -1 sera non-résidu et le nombre les variations dans la suite (B) sera égal à $\frac{p-3}{4}=n$.

Si n est pair, c'est-à-dire $p\equiv 3 \pmod 8$, $\frac{p-1}{2}$ sera résidu, partant sera non-résidu.

Si n est impair, c'est-à-dire $p\equiv 7 \pmod 8$, $\frac{p-1}{2}$ sera non-résidu et résidu quadratique de p.

XXIX.

(Astr. Nachr., Kiel, 109, 1884, 145—152.)

Quelques remarques sur l'intégration d'une équation différentielle.

1. L'équation différentielle, étudiée par M. H. Bruns dans les
s 2533, 2553 de ce Journal (voyez aussi l'article de M. Callandreau
ıns le n^0 2547)

$$) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = 2\beta x \cos t$$

été considérée aussi par M. F. Lindemann dans les Mathematische
nnalen, Bd. XXII, p. 117 e. s. Il m'a paru intéressant de rap-
ocher ces deux solutions et de déduire les conclusions de M. Bruns
: l'analyse de M. Lindemann.

En posant $\cos^2 \frac{1}{2} t = u$, on obtient

$$) \quad . \; . \quad u(1-u)\frac{d^2x}{du^2} + \tfrac{1}{2}(1-2u)\frac{dx}{du} + (n^2 + 2\beta - 4\beta u)\,x = 0$$

les leux intégrales particulières dont se compose l'intégrale gé-
ɛrale sont, d'après l'analyse de M. Lindemann

$$) \quad . \; . \; . \; . \quad \begin{cases} C\sqrt{F(u)}\, e^{+iM\int \frac{du}{F(u)\sqrt{u(1-u)}}} \\ C_1\sqrt{F(u)}\, e^{-iM\int \frac{du}{F(u)\sqrt{u(1-u)}}} \end{cases} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Ici

$$) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad F(u) = \sum_0^\infty c_k u^k$$

t une série, convergente pour une valeur quelconque de u. C et C_1

t deux constantes arbitraires, mais la constante M est parfaitement rminée dès qu'on connaît $F(u)$; en effet, la substitution des ex- ssions précédentes dans l'équation différentielle conduit à la ıtion

$$. \; . \quad M^2 = \tfrac{1}{2} u(1-u) F(u) F''(u) - \tfrac{1}{4} u(1-u) F'(u) F'(u) + \\ + \tfrac{1}{4}(1-2u) F(u) F'(u) + (n^2 + 2\beta - 4\beta u) F(u) F(u).$$

)n en déduit par la différentiation et division par $F(u)$

$$. \; . \quad u(1-u) F'''(u) + \tfrac{3}{2}(1-2u) F''(u) + \\ + (4n^2 + 8\beta - 1 - 16\beta u) F'(u) - 8\beta F(u) = 0.$$

\ un facteur constant près, qui s'élimine de lui-même dans les ressions (2), la fonction $F(u)$ est parfaitement déterminée par ces ıx conditions: 1° de satisfaire à l'équation (5), 2° d'être holomorphe ıs tout le plan.

:. En introduisant de nouveau t, les intégrales de l'équation (1) se sentent sous la forme

$$G(t) = C\sqrt{F(\cos^2 \tfrac{1}{2} t)}\, e^{+iM\int^t \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}},$$

$$G_1(t) = C_1\sqrt{F(\cos^2 \tfrac{1}{2} t)}\, e^{-iM\int^t \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}}.$$

Supposons maintenant, ce qui a lieu en général, que la constante qui est déterminée par (4), soit différente de zéro. Alors on voit : $F(u)$ et $F'(u)$ ne peuvent s'évanouir pour une même valeur de u, sorte que toutes les racines de $F(u) = 0$ sont des racines simples, de plus les valeurs 0 et 1 ne sont point des racines de cette ıation.

)n en conclut que la fonction $F(\cos^2 \frac{1}{2} t)$, qui est aussi une fonc- n holomorphe de t, n'admet que des racines simples en la con- érant comme fonction de t, comme nous le ferons dans la suite. Cela étant, il est facile de voir que $G(t)$ et $G_1(t)$ sont des fonctions formes de t. Supposons en effet que la variable t, en partant d'une eur t_0 décrit un contour fermé, en sorte que la valeur finale est ıle à t_0. Alors, si le contour contient une seule racine a de

$(\cos^2 \frac{1}{2} t) = 0$, les valeurs initiales et finales de $\sqrt{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}$ sont de igne contraire. Mais l'intégrale $\int^t \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}$ aura éprouvé un accrois-ement égal à

$$\frac{\pm 2 i \pi}{F'(a) \sqrt{a(1-a)}}$$

nais, d'après (4) on a

$$2 i M = \pm F'(a) \sqrt{a(1-a)}$$

t l'expression exponentielle $e^{\pm i M \int^t \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}}$ sera donc multipliée par e facteur $e^{\pm i \pi} = -1$, en sorte que la valeur finale de $G(t)$ coïncide ec la valeur initiale. La même chose a lieu quand le contour enfermerait plusieurs racines; $G(t)$ et $G_1(t)$ sont donc bien des fonc-ions uniformes de t, de plus elles ne deviennent jamais infinies.

En étudiant d'une manière analogue la variation qu'éprouve la onction $G(t)$, lorsque la variable croît d'une valeur t à $t + 2\pi$, on rrive au résultat suivant:

Considérons l'intégrale: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}$, le chemin de l'intégration eut être choisi d'une manière arbitraire, seulement il ne doit passer ar aucune racine de $F(\cos^2 \frac{1}{2} t) = 0$. Supposons que dans l'expres-ion $\sqrt{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}$ on fait varier la variable t de 0 à 2π en passant par es mêmes valeurs que dans l'intégrale. Alors les valeurs initiales t finales de $\sqrt{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}$ se distingueront par le facteur $(-1)^r$, r tant égale à 0 ou à 1. Posons

$$\mu = (-1)^r e^{i M \int_0^{2\pi} \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)}}$$

lors

$$G(t + 2\pi) = \mu G(t),$$

$$G_1(t + 2\pi) = \frac{1}{\mu} G_1(t).$$

La constante μ est indépendante du chemin de l'intégration qu'on choisi En déterminant donc m par

$$\mu = e^{2 i \pi m}$$

est-à-dire

$$\ldots\ldots\ldots\ m = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{F(\cos^2 \frac{1}{2} t)} + \frac{r}{2}$$

posant

$$G(t) = e^{+imt} H(t),$$

$$G_1(t) = e^{-imt} H_1(t),$$

aura $H(t + 2\pi) = H(t)$, $H_1(t + 2\pi) = H_1(t)$, et d'après un théorème nnu, on pourra donc développer ces fonctions de la manière ivante

$$H(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\, m_k\, e^{ikt},$$

$$H_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\, n_k\, e^{ikt},$$

s séries étant convergentes pour une valeur quelconque de t.

Nous avons retrouvé ainsi le résultat de M Bruns, on voit de us que la constante m, déterminée par (6), a la même signification e dans le mémoire de M. Bruns.

Comme la détermination de cette constante m est la principale fficulté qu'on rencontre dans l'application numérique, nous allons nner un moyen facile pour obtenir l'expression de la fonction u) qui figure dans (6). En effet, les moyens proposés par M. Lindeann pour déterminer $F(u)$, quoique irréprochables au point de vue éorique, ne sont pas propres pour le calcul

3. La substitution de la série $\sum_0^{\infty} c_k u^k$ dans l'équation différentielle) conduit à une relation récurrente, que nous écrivons ainsi

$$) \ldots\ldots\ldots\ v_{k+1} c_{k+2} = u_k c_{k+1} + c_k,$$

ı

$$) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} u_k = \dfrac{(k+1)[(k+1)^2 - 4n^2 - 8\beta]}{8\beta(2k+1)}, \\ v_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{16\beta(2k-1)}. \end{cases}$$

Il semble donc qu'on peut choisir arbitrairement c_0 et c_1, pour ılculer successivement c_2, c_3, ... Mais cela n'est pas, car en agissant nsi, la série $\sum c_k u^k$ ne serait pas convergente pour une valeur uelconque de u. Il faut au contraire déterminer le rapport $c_1 : c_0$ par ette condition que la série converge toujours. Supposons β différent e zéro (pour $\beta = 0$ l'équation (1) s'intègre immédiatement) on voit ue u_k, v_k deviennent infiniment grand avec k, mais leur rapport approche de l'unité. Pour une valeur assez grande de k la fraction ontinue

$$u_k + v_{k+1} : u_{k+1} + v_{k+2} : u_{k+2} + v_{k+3} : \ldots.$$

ɛra donc convergente, et l'on calcule facilement sa valeur numérique, ui sera peu différente de u_k lorsque k est grand.

Cela étant, donnons à c_k une valeur arbitraire différente de zéro calculons c_{k+1} par la formule

$$) \quad \ldots\ldots \quad -\frac{c_k}{c_{k+1}} = u_k + v_{k+1} : u_{k+1} + v_{k+2} : \ldots.$$

Connaissant maintenant c_k et c_{k+1} on peut calculer tous les autres oefficients à l'aide de (7). Lorsqu'aucun des coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ évanouit, cela revient à la même chose que d'appliquer la formule) pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

Il est évident d'abord, qu'en agissant ainsi la série $\sum c_k u^k$ satisit à l'équation différentielle (5); et en second lieu, pour une valeur ès grande de k on a à peu près $\frac{c_k}{c_{k+1}} = -u_k$, en sorte que la série onverge pour une valeur quelconque de u.

Ayant obtenu la fonction $F(u)$, on trouvera M par l'équation (4), ar exemple en posant $u = 0$

$$0) \quad \ldots\ldots \quad M^2 = \tfrac{1}{4} c_0 c_1 + (n^2 + 2\beta) c_0 c_0.$$

Si la valeur de M qu'on en déduit est réelle (nous supposons maintenant n^2 et β réels), la fonction $F(u)$ ne peut s'évanouir pour une valeur réelle de u comprise entre 0 et 1; en effet, lorsque $F(u)=0$, on a

$$M^2 = -\tfrac{1}{4}\, u(1-u)\, F'(u)\, F'(u).$$

Dans ce cas on peut choisir dans (6) un chemin d'intégration rectiligne et $r=0$. En appliquant une quadrature mécanique pour le calcul numérique on pourra donc calculer m à l'aide de l'expression

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad m = \frac{M}{s} \sum_1^s {}_k \frac{1}{F\left(\cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4s}\right)}.$$

4. Il résulte de l'analyse de M. Bruns que la valeur de m ne change point quand on remplace β par $-\beta$. On peut le vérifier aussi à l'aide des formules obtenues. L'équation (5) ne changeant point lorsqu'on remplace simultanément β par $-\beta$ et u par $1-u$, on en conclut

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad F(-\beta, u) = AF(\beta, 1-u),$$

A étant une constante. Nous écrivons maintenant $F(\beta, u)$ au lieu de $F(u)$ pour mettre en évidence la constante β. Soit M' la valeur de M, quand β est remplacé par $-\beta$, alors

$$M^2 = \tfrac{1}{4} F(\beta, 0) F'(\beta, 0) + (n^2 + 2\beta) F(\beta, 0) F(\beta, 0)$$

et posant $u=1$ dans (4) après avoir changé β en $-\beta$

$$M'^2 = -\tfrac{1}{4} F(-\beta, 1) F'(-\beta, 1) + (n^2 + 2\beta) F(-\beta, 1) F(-\beta, 1).$$

En posant $u=1$ dans l'équation (12) et dans celle qu'on en déduit par la différentiation, on voit que

$$M'^2 = A^2 M^2$$

et comme le signe est indifférent, $M' = AM$. Mais on a

$$m = \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{F(\beta, \cos^2 \frac{1}{2} t)} + \frac{r}{2}$$

et

$$m' = \frac{M'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{F(-\beta, \cos^2 \frac{1}{2} t)} + \frac{r'}{2},$$

ésignant par m' la valeur de m après le changement de β en $-\beta$. se rapportant à la signification de r et r', on voit facilement que elation (12) donne $r=r'$, et l'on aura $m=m'$ comme l'a trouvé 3runs. Au reste il va sans dire que la constante m n'étant pas rement déterminée, on peut toujours remplacer m par $m+k$, nt un nombre entier, et changer encore le signe de m. Dans ression (6) cette double indétermination est indiquée d'abord e que le signe de M, n'est pas déterminé, et en second lieu e que le chemin de l'intégration reste arbitraire.

ur compléter cette étude, il faudrait discuter le cas $M=0$. Mais ne cette discussion devient un peu longue parce qu'il y a plus cas à distinguer et qu'elle est de peu d'importance pour l'ap-tion, je n'entrerai point dans cette discussion.

Quand $\beta=0$, la fonction $F(u)$ se réduit à une constante, et peut, pour une valeur suffisamment petite de β, développer $F(u)$ nt les puissances croissantes de β. Il est aisé d'obtenir ce dé-ppement. En effet, en posant $c_0=1$, on voit facilement à l'aide fractions continues qui expriment les rapports $c_0 : c_1$, $c_1 : c_2$ etc. le développement suivant les puissances de β donnera

$$\begin{aligned} c_1 &= p_1\beta + p_2\beta^2 + p_3\beta^3 + \ldots, \\ c_2 &= q_2\beta^2 + q_3\beta^3 + \ldots, \\ c_3 &= r_3\beta^3 + \ldots, \end{aligned}$$

n sorte qu'en général c_k commence par un terme avec β^k. On ra calculer encore facilement de proche en proche les coefficients $, \ldots, q_2, \ldots$ qui dépendent seulement de n^2. Ce sont des fonc- rationnelles de n^2, dont les dénominateurs renferment seulement facteurs de la forme $4n^2-k^2$, k étant un nombre entier. On par conséquent

$$F(u) = 1 + L_1\beta + L_2\beta^2 + L_3\beta^3 + \ldots,$$

$$\begin{aligned} L_1 &= p_1 u, \\ L_2 &= p_2 u + q_2 u^2, \\ L_3 &= p_3 u + q_3 u^2 + r_3 u^3, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir maintenant sans difficulté le développement e m suivant les puissances de β, développement dont M. Bruns a lculé les premiers termes par un procédé bien différent. En effet, formule (6) devient dans le cas actuel que β est suffisamment petit

$$3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad m = \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\mathrm{F}(\cos^2\frac{1}{2}t)}$$

la formule (10) donne à cause de $c_0 = 1$

$$\mathrm{M}^2 = n^2 + 2\beta + \tfrac{1}{4}c_1.$$

Il suffit donc de développer M et $1 : \mathrm{F}(u)$ suivant les puissances e β, et de substituer dans la formule (13) pour obtenir le développement cherché de m. Comme nous le savons ce développement doit nfermer seulement les puissances paires de β, c'est ce qu'on ne oit pas à priori par le calcul indiqué. Il vaut donc mieux de diriger e calcul d'une manière légèrement différente.

Déterminons la constante arbitraire que renferme $\mathrm{F}(u)$ de manière ue $\mathrm{F}(\frac{1}{2}) = 1$ et posons

$$4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{F}\left(\frac{1+v}{2}\right) = e_0 + e_1 v + e_2 v^2 + e_3 v^3 + \ldots$$

ù $e_0 = 1$. La comparaison avec le développement $\mathrm{F}(u) = \sum c_k u^k$ it voir que le développement de e_k suivant les puissances de β comence par un terme avec β^k. En outre la formule (12) fait voir aintenant que la série $\sum e_k v^k$ doit rester la même en changeant la fois v en $-v$, et β en $-\beta$, en sorte que le développement de e_k contiendra seulement des termes en $\beta^k, \beta^{k+2}, \beta^{k+4}, \ldots$ En posant onc

$$\mathrm{F}\left(\frac{1+v}{2}\right) = \mathrm{N}_0 + \mathrm{N}_1\beta + \mathrm{N}_2\beta^2 + \mathrm{N}_3\beta^3 + \ldots$$

N_k sera un polynôme en v qui contiendra seulement des termes en $v^k, v^{k-2}, v^{k-4}, \ldots$ et qui ne renferme point de terme sans v. On rouve

$$=1$$

$$=\frac{4}{4\,n^2-1}\,v$$

$$\frac{24}{(4\,n^2-1)\,(4\,n^2-4)}\,v^2$$

$$=\frac{160}{(4\,n^2-1)\,(4\,n^2-4)\,(4\,n^2-9)}\left[v^3-\frac{6}{4\,n^2-1}\,v\right]$$

$$=\frac{1120}{(4\,n^2-1)\,(4\,n^2-4)\,(4\,n^2-9)\,(4\,n^2-16)}\left[v^4-\frac{60}{7}\cdot\frac{8\,n^2-11}{(4\,n^2-1)\,(4\,n^2-4)}\,v^2\right].$$

Ɛn général, lorsqu'on connaît les coefficients α, β, γ, ... du poly-ne

$$N_{k-1}=\alpha\,v^{k-1}-\beta\,v^{k-3}+\gamma\,v^{k-5}-\delta\,v^{k-7}+\dots$$

pourra calculer ceux du polynôme N_k

$$N_k=\alpha_1\,v^k-\beta_1\,v^{k-2}+\gamma_1\,v^{k-4}-\delta\,v^{k-6}+\dots$$

aide des formules suivantes

$$k\,[4\,n^2-k^2]\,\alpha_1=4\,(2\,k-1)\,\alpha\,,$$

$$(k-2)\,[4\,n^2-(k-2)^2]\,\beta_1-k\,(k-1)\,(k-2)\,\alpha_1=4\,(2\,k-5)\,\beta\,,$$

$$(k-4)\,[4\,n^2-(k-4)^2]\,\gamma_1-(k-2)\,(k-3)\,(k-4)\,\beta_1=4\,(2\,k-9)\,\gamma\,,$$

$$(k-6)\,[4\,n^2-(k-6)^2]\,\delta_1-(k-4)\,(k-5)\,(k-6)\,\gamma_1=4\,(2\,k-13)\,\delta\,,$$

t la loi est évidente. C'est ce qu'on trouve sans difficulté à l'aide l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(u)$.

ʟe développement de $F\left(\frac{1+v}{2}\right)$ étant obtenu ainsi, on en déduit

$$1:F\left(\frac{1+v}{2}\right)=1-N_1\,\beta+(N_1^2-N_2)\,\beta^2-(N_1^3-2\,N_1\,N_2+N_3)\beta^3+\dots,$$

$$\int^{2\pi}\frac{d\,t}{F\,(\cos^2\frac{1}{2}t)}=1+(N_1^2-N_2)\,\beta^2+(N_1^4-3\,N_1^2\,N_2+2\,N_1\,N_3+N_2^2-N_4)\beta^4+\dots,$$

a condition qu'on remplace dans le second membre v^{2k} par $\frac{.\,5\dots(2\,k-1)}{.\,6\dots\;(2\,k)}$, c'est-à-dire par $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2k}t\,d\,t$. Quant à la valeur M, il faut la déduire de

$$M^2=n^2+e_2-\tfrac{1}{4}\,e_1\,e_1\,,$$

t e_2 étant les coefficients de v et de v^2 dans

$$N_0+N_1\,\beta+N_2\,\beta^2+\dots$$

n voit que le développement de M et par conséquent aussi celui m contient seulement les puissances paires de β. En effectuant les lculs indiqués j'ai retrouvé les valeurs de m_1, m_2 données par . Bruns, dans le développement $m = n + m_1 \beta^2 + m_2 \beta^4 + \ldots$ Rap-lons ici qu'il ne convient pas de calculer m par cette formule, ais on peut en déduire cet autre

$$\cos 2\pi m = \cos 2\pi n + 2\pi^2 \sum_1^\infty f_k \beta^{2k}$$

i converge pour une valeur quelconque de m comme l'a démontré . Bruns.

6. Nous avons vu comment on peut calculer les coefficients c_k la série $F(u) = \sum c_k u^k$. Mais on peut obtenir encore un peu plus omptement les coefficients de la série

) . . . $F(\cos^2 \tfrac{1}{2} t) = \tfrac{1}{2} g_0 + g_1 \cos t + g_2 \cos 2t + g_3 \cos 3t + \ldots$

l'aide des formules

) . . . . $\nu_{k+1} g_{k+2} = -\mu_k g_{k+1} - g_k$,

) . . . . $\begin{cases} \mu_k = \dfrac{(k+1)[(k+1)^2 - 4n^2]}{2\beta(2k+1)} \\ \nu_k = \dfrac{2k+1}{2k-1}. \end{cases}$

) . . . $-\dfrac{g_k}{g_{k+1}} = \mu_k - \nu_{k+1} : \mu_{k+1} - \nu_{k+2} : \mu_{k+2} - \ldots$

Les coefficients g_k décroissent, comme on le voit, encore plus ra-lement que les c_k, mais par contre le calcul de M n'est pas aussi nple, il faut se servir des formules suivantes

$$M^2 = \tfrac{1}{4} F(0) F'(0) + (n^2 + 2\beta) F(0) F(0),$$
$$M^2 = -\tfrac{1}{4} F(1) F'(1) + (n^2 - 2\beta) F(1) F(1),$$

$$F'(0) = 2[g_1 - 2^2 g_2 + 3^2 g_3 - 4^2 g_4 + 5^2 g_5 - \ldots],$$
$$F'(1) = 2[g_1 + 2^2 g_2 + 3^2 g_3 + 4^2 g_4 + 5^2 g_5 + \ldots].$$

n pourrait encore calculer directement les coefficients e_k du dé-
ɔppement de $F\left(\frac{1+v}{2}\right)$ suivant les puissances de v, elles sont par la relation

$$4\beta(2k+1)e_k = -(k+1)[(k+1)^2-4n^2]e_{k+1}+(k+1)(k+2)(k+3)e_{k+3}.$$

i on ne peut pas exprimer directement par une fraction continue apport de deux coefficients consécutifs, mais cela est assez in-rent pour le calcul numérique. On peut démontrer rigoureuse-t qu'on peut calculer e_0, e_1, e_2, ... avec une approximation aussi e qu'on veut par le procédé suivant. Pour une valeur suffisam-t grande de l'indice r on prendra $e_{r+1}=0$, $e_{r+2}=0$ et e_r égale e quantité arbitraire différente de zéro. Il faut ensuite calculer , e_{r-2}, ..., e_0 à l'aide de la relation (19). Quelques applications ériques m'ont fait voir qu'au point de vue de la commodité il a pas une grande différence entre cette manière et celle dans elle on se sert des formules (15) à (18). Mais ces méthodes sem-t présenter un leger avantage sur le calcul des coefficients c_k. qu'on aura calculé les e_k il faudra calculer M par

$$M^2 = e_0 e_2 - \tfrac{1}{4} e_1 e_1 + n^2 e_0 e_0.$$

ans ce qui précède j'ai dit que la fonction $F(u)$ renferme seule-t un facteur constant arbitraire. Cela est vrai en général, mais ue $\beta=0$ et qu'en même temps n est la motié d'un nombre r, l'expression générale de $F(u)$ est un polynôme en u renfermant : constantes arbitraires; on a en effet dans ce cas

$$F(\cos^2 \tfrac{1}{2} t) = A\cos^2 n t + B \sin^2 n t.$$

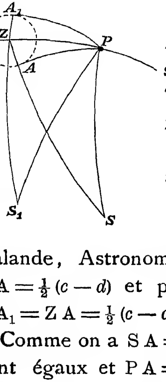
XXX.

(Astr. Nachr., Kiel, 110, 1884, 7—8.)

Note sur le problème du plus court crépuscule.

A l'occasion des articles de M. Zelbr dans les n^{os} 2575, 2602 j'ai t la remarque que la solution de ce problème ne devient guère ıs compliquée en tenant compte de la réfraction et du diamètre du leil. Mais cela résulte déjà de l'article du Dr. Stoll cité par M. Zelbr ns le n^0 2602, article qui contient en effet la solution analytique mplète du problème.

Supposons que le commencement et la fin du crépuscule aient lieu lorsque la dépression du soleil sous l'horizon est égale respectivement à $c\,(=18°)$ et à d. Soient: Z le zénith, P le pôle, S et S_1 les positions du soleil au commencement et à la fin du crépuscule. Traçons les arcs de grand cercle $PS = PS_1 = 90° - \delta$, $ZS = 90° + c$, $ZS_1 = 90° + d$.



La variation de l'angle SPS_1 devant être égale à zéro pour une variation infiniment petite de la déclinaison du soleil, on en conclut facilement qu'on doit avoir $\sphericalangle PSZ = \sphericalangle PS_1Z$. (Voir p. e. ılande, Astronomie, II, p. 557, 3^{ième} édit.) Prenons maintenant $A = \frac{1}{2}(c - d)$ et prolongeons l'arc S_1Z jusqu'en A_1 en sorte que $A_1 = ZA = \frac{1}{2}(c - d)$, enfin traçons les arcs de grand cercle PA, PA_1.

Comme on a $SA = S_1A_1 = 90° + \frac{1}{2}(c + d)$ les triangles PSA, PS_1A_1 nt égaux et $PA = PA_1$, $\sphericalangle SAP = \sphericalangle S_1A_1P$. Mais de l'égalité $A = PA_1$ on conclut que les triangles PZA, PZA_1 sont égaux, nc: $\sphericalangle S_1A_1P = \sphericalangle ZAP = \sphericalangle SAP$. Les angles SAP, S_1A_1P sont

ıc des angles droits et l'on obtient A et A_1 en menant les arcs , PA_1 tangents au petit cercle décrit de Z avec un rayon égal $(c-d)$. Les azimuts PZS, PZS_1 sont supplémentaires. On voit plus que l'angle SPS_1 qui mesure la durée du plus court cré- cule est égale à l'angle APA_1.

.es triangles rectangles PAZ, PAS donnent

$$\cos PA = \frac{\sin\varphi}{\cos\frac{1}{2}(c-d)},$$

$$\sin\delta = \cos PA \cos SA = -\cos PA \sin\tfrac{1}{2}(c+d)$$

ıc

$$\sin\delta = -\sin\varphi\frac{\sin\frac{1}{2}(c+d)}{\cos\frac{1}{2}(c-d)}.$$

Ξn posant $\sphericalangle ZPS = t$, $\sphericalangle ZPS_1 = t_1$ on a $\sphericalangle APZ = \frac{1}{2}(t-t_1)$, $S_1PA_1 = \frac{1}{2}(t+t_1)$, donc

$$\sin\tfrac{1}{2}(t-t_1) = \frac{\sin\frac{1}{2}(c-d)}{\cos\varphi},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(t+t_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(c+d)}{\cos\delta}.$$

Ξnfin l'azimut du soleil au commencement et à la fin du crépuscule déterminent à l'aide de

$$\cos PZS = -\cos PZS_1 = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(c-d).$$

Ξn traitant le problème par l'analyse on est conduit à une seconde ıtion qui se déduit de la première en changeant c en $180°-c$. ε est réelle seulement dans le cas qu'il est possible de mener P un grand cercle tangent au petit cercle décrit de Z avec un on égal à $90°-\frac{1}{2}(c+d)$, c'est-à-dire lorsque φ est inférieur à $+d)$. Je crois inutile d'insister sur la signification de cette se- de solution.

XXXI.

(Ann. Sci. Éc. norm., Paris, sér. 3, 1, 1884, 409—426.)

Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques.

Introduction.

Les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur nu-
érique d'une intégrale définie ont été l'objet d'une étude d'ensemble,
la part de M. Radau, dans le Tome VI (3e série) du Journal de
athématiques pures et appliquées.

L'auteur y a réuni à peu près tout ce qui est connu sur ce sujet
, en donnant les constantes dont on peut avoir besoin dans l'ap-
ication, il a encore augmenté l'utilité de son travail.

Les recherches suivantes ont été dirigées par une autre idée. En
plaçant au point de vue le plus général, mon but a été d'étudier
question de savoir si ces formules permettent d'atteindre une ap-
oximation indéfinie.

Jusqu'à présent, il semble que cette étude n'ait pas encore été
ordée. On a toujours supposé que la fonction dont il s'agit est
veloppable en série suivant les puissances croissantes de la variable.
, comme on le verra, ces quadratures où, à l'exemple de Gauss,
abscisses sont déterminées de manière à atteindre le plus haut
gré de précision, présentent des circonstances particulières, qui
t pour conséquence qu'elles sont applicables dans des cas bien plus
endus. Par exemple, la quadrature de Gauss elle-même donne une
proximation indéfinie pour toute fonction intégrable. Dans l'expo-

n de la théorie générale de cette quadrature mécanique, j'ai runté bien des choses au Traité des fonctions sphériques (deuxième ion) de M. Heine, et les nos 1, 2, 4 ne contiennent rien d'essen- qu'on ne trouve dans ce traité.

Détermination d'un polynôme qui satisfait à certaines conditions. $f(x)$ une fonction donnée, qui ne dévient pas négative, quand end les valeurs a, b et toutes les valeurs intermédiaires, et inté- le dans cet intervalle, en sorte que $\int_a^b f(x)\,dx$ ait un sens deter- é. Il n'est pas nécessaire que $f(x)$ reste toujours finie; mais nous posons finies les limites a et b, bien que quelques-uns des résultats quels nous arriverons restent applicables dans le cas contraire. nfin, pour éviter certaines discussions qui n'auraient guère d'uti- nous ferons encore la restriction suivante: nous supposerons l existe un intervalle (A, B) appartenant à l'intervalle plus étendu) tel que, lorsque x est situé dans (A, B), $f(x)$ reste constamment érieure à une quantité positive ε, d'ailleurs tout à fait arbitraire, me l'intervalle (A, B).

râce à cette dernière restriction, la valeur de $\int_a^b f(x)\,dx$ sera donc tive et différente de zéro, et nous avons écarté aussi le cas sans rêt où $f(x)$ serait constamment égale à zéro dans l'intervalle (a, b). ela posé, nous commençons par déterminer un polynôme $P(x)$ degré donné n,

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

les conditions

$$\ldots \quad \int_a^b f(x) P(x) x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

es conditions donnent lieu aux équations linéaires suivantes, qui ent à déterminer les inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_a^b f(x) x^{n+k}\,dx + a_1 \int_a^b f(x) x^{n+k-1}\,dx \\ &\qquad\qquad + a_2 \int_a^b f(x) x^{n+k-2}\,dx + \ldots + a_n \int_a^b f(x) x^k\,dx = 0. \end{aligned}\right.$$

Le problème est donc déterminé en général, et les inconnues a_1, $a_2, \ldots, a_n$ dépendent rationnellement des $2n$ constantes $\int_a^b f(x)\,x^k\,dx$, où $k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. Mais il importe de faire voir qu'en résolvant ces équations linéaires, aucune impossibilité ni indétermination ne sauraient se présenter.

Remarquons pour cela que le déterminant Δ du système (2) est composé d'une série de termes, dont chacun est un produit de n intégrales de la forme $\int_a^b f(x)\,x^k\,dx$. En écrivant un tel produit sous la forme d'une intégrale multiple d'ordre n, on arrive à l'expression suivante de Δ

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n)$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & \ldots & x_3^{n+1} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ x_n^{n-1} & x_n^n & x_n^{n+1} & \ldots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

ou bien

$$\Delta = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n)\,x_2\,x_3^2\,x_4^3\ldots x_n^{n-1}\,\Pi\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n,$$

où l'on a

$$\Pi = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

La notation des variables étant indifférente, on peut, dans cette expression, permuter de toutes les manières les indices $1, 2, \ldots, n$. Par une permutation quelconque Π ne change pas ou change seulement de signe, et, en ajoutant toutes les équations qu'on obtient, on aura

$$\Sigma \pm x_2\,x_3^2\ldots x_n^{n-1} = \Pi\,;$$

$$1.2.3\ldots n\,\Delta = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n)\,(\Pi)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

près les conditions que nous avons imposées à $f(x)$, il est évident a une valeur positive, différente de zéro.

polynôme cherché $P(x)$ existe donc pour toute valeur de n, et désignerons ces polynômes, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, par $P_1(x)$, $P_3(x), \ldots$.

Propriétés des polynômes $P(x)$. — La propriété principale du ôme $P_n(x)$ consiste en ce que l'on a

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,(\alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \ldots + \lambda x + \mu)\,dx = 0.$$

i est une conséquence immédiate des équations (1) qui ont servi déterminer.

s indices m et n étant différents, on a donc aussi

$$\int_a^b f(x)\,P_m(x)\,P_n(x)\,dx = 0.$$

'aide d'un raisonnement dû à Legendre, nous pouvons maintenant r la proposition suivante :

s racines de l'équation $P_n(x) = 0$ sont réelles, inégales et com- entre a et b en excluant les limites.

effet, désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_k$ les racines réelles comprises a et b. Le nombre de ces racines est au moins égal à 1, parce à cause de l'équation

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,dx = 0,$$

doit changer de signe dans l'intervalle (a, b).

posant

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)\,Q(x),$$

ne changera point de signe dans l'intervalle (a, b).

r, si $Q(x)$ n'était pas simplement égal à l'unité,

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$$

it au plus du degré $n-1$, et l'on aurait, d'après (4),

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)\,dx=0,$$

ui est évidemment impossible, parce que l'intégrale a une valeur tive.

outes les racines de $P_n(x)=0$ sont donc comprises dans l'inter- (a, b), mais il ne saurait y avoir deux racines égales entre elles. effet, supposons

$$P_n(x)=(x-x_1)^2\,R(x),$$

étant un polynôme du degré $n-2$; on devra avoir

$$\int_a^b f(x)\,P_n(x)\,R(x)\,dx=0,$$

ui est impossible.

Relations entre les polynômes $P(x)$. — Le polynôme $Q(x)$ du é n, le plus général qui satisfait aux conditions (1),

$$\int_a^b f(x)\,Q(x)\,x^k\,dx=0 \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1),$$

e distingue de $P_n(x)$ que par un facteur constant.

n effet, tout polynôme $Q(x)$ du degré n peut se mettre sous la e

$$Q(x)=a_0\,P_n(x)+\dots+a_k\,P_{n-k}(x)+\dots+a_{n-1}\,P_1(x)+a_n.$$

r, en multipliant par $P_{n-k}(x)\,f(x)\,dx$ et intégrant entre les es a, b, on trouve, à l'aide de (5),

$$0=a_k\int_a^b f(x)\,[P_{n-k}(x)]^2\,dx \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n),$$

-à-dire $a_k=0$.

nsidérons maintenant l'expression

$$\mathrm{R}(x) = \mathrm{P}_n(x) - x\,\mathrm{P}_{n-1}(x) + \mathrm{A}\,\mathrm{P}_{n-1}(x),$$

nt une constante quelconque. Ce polynôme satisfait évidemment conditions

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{R}(x)\,x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-3).$$

is on peut choisir A de manière que $\mathrm{R}(x)$ soit du degré $n-2$; cela, il suffit que $x - \mathrm{A}$ soit le quotient qu'on obtient en divisant par $\mathrm{P}_{n-1}(x)$.

après la remarque que nous venons de faire, $\mathrm{R}(x)$, pour cette r particulière de A, ne différera que par un facteur constant de (x), en sorte que nous avons une relation de cette forme

$$\ldots\ \mathrm{P}_n(x) = (x - a_{n-1})\,\mathrm{P}_{n-1}(x) - \lambda_{n-1}\,\mathrm{P}_{n-2}(x)$$

$$\mathrm{P}_1(x) = x - a_0,$$
$$\mathrm{P}_2(x) = (x - a_1)\,\mathrm{P}_1(x) - \lambda_1.$$

peut arriver facilement à des expressions élégantes des con- es a_k, λ_k. L'équation

$$\mathrm{P}_{k+1}(x) = (x - a_k)\,\mathrm{P}_k(x) - \lambda_k\,\mathrm{P}_{k-1}(x)$$

e, en effet, en multipliant par $\mathrm{P}_k(x) f(x)\,dx$ et intégrant de $x = a$ 'à $x = b$,

$$\ldots\ldots\ a_k = \frac{\int_a^b x\,\mathrm{P}_k(x)\,\mathrm{P}_k(x)\,f(x)\,dx}{\int_a^b \mathrm{P}_k(x)\,\mathrm{P}_k(x)\,f(x)\,dx}.$$

multipliant la même équation par $\mathrm{P}_{k-1}(x) f(x)\,dx$ et intégrant nt

$$\ldots\ \lambda_k = \frac{\int_a^b \mathrm{P}_k(x)\,\mathrm{P}_k(x)\,f(x)\,dx}{\int_a^b \mathrm{P}_{k-1}(x)\,\mathrm{P}_{k-1}(x)\,f(x)\,dx},$$

marquant que $x\,\mathrm{P}_{k-1}(x) = \mathrm{P}_k(x) +$ un polynôme de degré $k-1$.

On voit que α_k reste compris entre a et b, tandis que λ_k est tou-
rs positif.

Les relations (6), (7) et (8) permettent de calculer de proche en
oche tous les polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... On a d'abord

$$\alpha_0 = \int_a^b x f(x)\,dx : \int_a^b f(x)\,dx,$$

qui fait connaître $P_1(x)$. Les formules (7) et (8) donnent alors α_1,
ce qui fait connaître $P_2(x)$, ...

Mais les relations (6) conduisent encore à une autre conséquence,
i complète la proposition démontrée sur les racines de l'équation
$(x) = 0$.

Substituons la valeur $x = \alpha_0$, racine de $P_1(x) = 0$ dans

$$P_2(x) = (x - \alpha_1) P_1(x) - \lambda_1,$$

vient

$$P_2(\alpha_0) = -\lambda_1,$$

antité négative par conséquent. L'équation $P_2(x) = 0$ a donc ses
cines β, γ, l'une supérieure, l'autre inférieure à α_0.

On trouvera de même

$$P_3(\beta) = -\lambda_2 P_1(\beta),$$
$$P_3(\gamma) = -\lambda_2 P_1(\gamma),$$

is $P_1(\beta)$ est positif, $P_1(\gamma)$ négatif; donc l'équation $P_3(x) = 0$ a une
cine supérieure à β, une autre comprise entre β et γ, enfin la troi-
me inférieure à γ.

En continuant ainsi, on voit que généralement les racines de
$_{-1}(x) = 0$ séparent les racines de $P_k(x) = 0$.

4. *Application des résultats précédents à la quadrature mécanique.* —
it $\mathcal{G}(x)$ un polynôme entier en x, du degré $2n - 1$ au plus. La
vision de $\mathcal{G}(x)$ par $P_n(x)$ donnera

$$\mathcal{G}(x) = Q(x) P_n(x) + R(x);$$

quotient $Q(x)$, ainsi que le reste $R(x)$ étant tous les deux du degré
-1 au plus.

faisant attention à (4), on en tire

$$\int_a^b f(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\mathrm{R}(x)\,dx.$$

signons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les racines de l'équation $\mathrm{P}_n(x)=0$, es par ordre de grandeur croissante; $\mathrm{R}(x)$ étant du degré $n-1$, identiquement

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_1)\,\mathrm{P}'_n(x_1)}\,\mathrm{R}(x_1) + \ldots + \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_n)\,\mathrm{P}'_n(x_n)}\,\mathrm{R}(x_n);$$

sant donc

$$\ldots\ldots \quad \mathrm{A}_k = \int_a^b f(x)\,\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(x-x_k)\,\mathrm{P}'_n(x_k)}\,dx,$$

nt

$$\int_a^b f(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = \mathrm{A}_1\,\mathrm{R}(x_1) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\mathrm{R}(x_n),$$

$\mathrm{R}(x_1) = \mathfrak{G}(x_1), \ldots$; donc

$$\ldots \int_a^b f(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = \mathrm{A}_1\,\mathfrak{G}(x_1) + \mathrm{A}_2\,\mathfrak{G}(x_2) + \ldots + \mathrm{A}_n\,\mathfrak{G}(x_n),$$

constantes $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$, ne dépendent en aucune façon de la on $\mathfrak{G}(x)$.

Propriétés des constantes A_k. — La première de ces propriétés te en ce que tous les A_k sont positifs. Cela ne résulte pas immé- nent de la formule (9) qui a servi à leur définition, quoiqu'on ait le déduire de cette formule.

s il est plus facile de remarquer que la formule (10) subsiste un polynôme $\mathfrak{G}(x)$ du degré $2n-1$ au plus, tout à fait arbitraire; urs, il est permis de prendre $\mathfrak{G}(x) = \left[\frac{\mathrm{P}_n(x)}{x-x_k}\right]^2$, ce qui donne

$$\ldots\ldots \quad \int_a^b f(x)\left[\frac{\mathrm{P}_n(x)}{x-x_k}\right]^2 dx = \mathrm{A}_k\,[\mathrm{P}'_n(x_k)]^2,$$

ésulte immédiatement la propriété énoncée.

Cette propriété est donc une conséquence nécessaire de (10), même ans le cas où l'équation (10) ne subsisterait qu'en prenant pour $\mathcal{G}(x)$ n polynôme du degré $2n-2$.

Nous arrivons maintenant à une autre propriété plus cachée des A_k, ue nous énonçons d'abord en écrivant les deux inégalités

$$12)\quad A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n),$$

$$13)\quad A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

La démonstration de ces inégalités dépend de nouveau de la for- ıule (10), où nous prendrons pour $\mathcal{G}(x)$ un polynôme $T(x)$ du degré $n-2$ défini par les conditions

$$\begin{array}{ll}
T(x_1) = 1, & T'(x_1) = 0, \\
T(x_2) = 1, & T'(x_2) = 0, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
T(x_{k-1}) = 1, & T'(x_{k-1}) = 0, \\
T(x_k) = 1, & \\
T(x_{k+1}) = 0, & T'(x_{k+1}) = 0, \\
T(x_{k+2}) = 0, & T'(x_{k+2}) = 0, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
T(x_n) = 0, & T'(x_n) = 0.
\end{array}$$

Le nombre de ces conditions étant $2n-1$, et les quantités x_1, $_2$, $\ldots$, x_n étant inégales, $T(x)$ est parfaitement défini, et l'on aura 'après (10),

$$14)\quad \ldots\quad \int_a^b f(x)\,T(x)\,dx = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_k.$$

Considérons maintenant l'équation

$$T'(x) = 0.$$

Nous voyons d'abord qu'elle admet les racines

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1},$$
$$x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$$

u nombre de $n-1$.

uite, le théorème de Rolle nous apprend l'existence de $k-1$ s

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,\ \xi_{k-1},$$

parent les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$
in, le même théorème nous apprend l'existence des $n-k-1$ s

$$\eta_{k+2},\ \eta_{k+3},\ \ldots,\ \eta_n$$

parent les quantités $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$.
nombre total des racines énumérées s'élève à $2n-3$, et, comme tion est du degré $2n-3$, elle n'en a pas d'autres. Nous voyons ue toutes les racines de $T'(x)=0$ sont réelles et inégales Il s'en- ue $T'(x)$ change de signe chaque fois que x passe par une des ra- Les racines ξ_{k-1} et x_{k+1} sont deux racines consécutives, tandis est compris entre ξ_{k-1} et x_{k+1}. Mais $T(x_k)=1$, $T(x_{k+1})=0$; $T'(x)$ est constamment négatif dans l'intervalle (ξ_{k-1}, x_{k+1}).
naissant maintenant le signe de $T'(x)$, dans un des intervalles is entre deux racines consécutives, on en déduit aussitôt le signe (x) pour une valeur quelconque de x; on trouve ainsi:

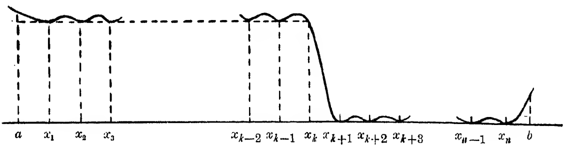
Intervalle.	Signe de $T'(x)$.
(a, x_1)	$-$
(x_1, ξ_1)	$+$
(ξ_1, x_2)	$-$
(x_2, ξ_2)	$+$
. . . .	. .
(x_{k-1}, ξ_{k-1})	$+$
(ξ_{k-1}, x_{k+1})	$-$
(x_{k+1}, η_{k+2})	$+$
(η_{k+2}, x_{k+2})	$-$
. . . .	. .
(x_{n-1}, η_n)	$+$
(η_n, x_n)	$-$
(x_n, b)	$+$

près cela, on peut se représenter facilement la série des valeurs rend le polynôme $T(x)$, et qui est indiquée dans la figure ci- .

On voit:

1° Que $T(x)$ ne devient pas négatif dans l'intervalle (a, b);

2° Que $T(x)$ ne devient pas inférieur à l'unité dans l'intervalle (a, x_k).



Dès lors nous pouvons conclure de l'équation (14)

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k \geqq \int_a^{x_k} f(x)\, T(x)\, dx.$$

Le signe $=$ ne saurait convenir que lorsque l'intervalle (A, B) dont nous supposons l'existence (n° 1) tombe entièrement dans l'intervalle (a, x_k). En remplaçant enfin $T(x)$ par sa valeur minima dans l'intervalle (a, x_k), qui est égale à l'unité, nous avons, dans tous les cas,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k > \int_a^{x_k} f(x)\, dx.$$

Ce raisonnement s'applique aux valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$ de k; d'après une remarque que l'on trouvera plus loin (n° 7), cette inégalité reste encore vraie pour $k = n$.

Quant à l'inégalité (13), on pourrait la déduire d'une manière analogue; mais il est un peu plus court de remarquer qu'on démontrera précisément de la même manière que (12), cette autre inégalité

$$A_{k+1} + A_{k+2} + \ldots + A_n > \int_{x_{k+1}}^{b} f(x)\, dx \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1),$$

en considérant l'autre limite (b) de l'intégrale. Or

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \int_a^b f(x)\, dx;$$

, par soustraction,

$$A_1 + A_2 + \dots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

ous savons déjà que A_k est positif; cela se confirme de nouveau par égalités (12), (13) en remplaçant dans la dernière k par $k-1$.
vant d'aller plus loin dans les considérations générales, nous allons tenant considérer un cas spécial, celui de la quadrature de Gauss, e $f(x) = 1$.

Sur la quadrature de Gauss. — Supposons donc $f(x) = 1$, et pour lifier (sans nuire réellement à la généralité), $a = -1$, $b = +1$.
lors, comme l'on sait, le polynôme $P_n(x)$ ne se distingue que par acteur constant du polynôme X_n de Legendre. Les inégalités (12) 3) deviennent

$$\dots\dots\dots \left\{\begin{array}{l} -1 + A_1 + A_2 + \dots + A_k > x_k, \\ -1 + A_1 + A_2 + \dots + A_k < x_{k+1}. \end{array}\right.$$

ipposons maintenant qu'on applique la quadrature à une fonc- $\mathfrak{F}(x)$ quelconque; on aura pour valeur approchée de

$$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(x)\,dx$$

oression

$$\dots\dots\ A_1\mathfrak{F}(x_1) + A_2\mathfrak{F}(x_2) + \dots + A_n\mathfrak{F}(x_n).$$

[ais, d'après les inégalités (14), x_1, x_2, x_3, ... tombent dans les rvalles

$$(-1,\ -1 + A_1),\ (-1 + A_1,\ -1 + A_1 + A_2),$$
$$(-1 + A_1 + A_2,\ -1 + A_1 + A_2 + A_3),\ \dots.$$

ette expression (15) rentre donc dans celle-ci, qui sert de défini- de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(x)\,dx$,

$$\lim\,[\delta_1\mathfrak{F}(\xi_1) + \delta_2\mathfrak{F}(\xi_2) + \dots + \delta_n\mathfrak{F}(\xi_n)],$$

comme les différences $x_1 + 1$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... deviennent

finiment petites avec $\frac{1}{n}$, nous arrivons à cette conclusion, que l'ex-
ession (15) donnera avec une approximation indéfinie la valeur de
$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(x)\,dx$, en augmentant n, toutes les fois que $\mathfrak{F}(x)$ est intégrable
ns l'intervalle $(-1, +1)$, et reste comprise entre deux limites finies.

7. *Sur la distribution des racines de l'équation* $P_n(x)=0$. — Dans
cas spécial que nous venons de considérer, les connaissances acquises
r les polynômes de Legendre nous ont permis de conclure que les
cines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont distribuées de manière que les quantités
$+1,\ x_2-x_1,\ \ldots,\ x_n-x_{n-1},\ 1-x_n$ deviennent infiniment petites
ec $\frac{1}{n}$. Il nous reste à chercher la proposition analogue pour le cas
néral. Voici une première observation à cet égard:

Supposons d'abord qu'il existe un nombre a_1 plus grand que a,
ais plus petit que b, tel que

$$\int_a^{a_1} f(x)\,dx = 0,$$

nc aussi

$$\int_a^{a_1} x^k f(x)\,dx = 0.$$

Il est évident alors que le polynôme $P_n(x)$, que nous déterminons,
ra identique à celui qu'on aurait obtenue en considérant directement
limites a_1 et b au lieu de a et b. Les racines de $P_n(x)=0$ seront
nc comprises dans l'intervalle (a_1, b) (excluant les limites), et il n'y
ra aucune racine dans l'intervalle (a, a_1). Une remarque analogue
pplique à l'autre limite b, et nous pouvons donc dire que, lorsqu'un
tervalle (α, β), tel que

$$\int_\alpha^{\beta} f(x)\,dx = 0,$$

tend jusqu'à une des limites a ou b, cet intervalle ne comprendra
cune racine de $P_n(x)=0$.

Mais nous ajoutons maintenant que, lorsque cet intervalle (α, β) ne
tend pas jusqu'à une des limites a ou b, cet intervalle (incluant les
nites α, β) ne comprend jamais plus d'une racine.

st, en effet, une conséquence immédiate des inégalités (12) et (13), onnent

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx > 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n-1).$$

; exemples font voir, du reste, que les deux cas, où un tel inter- (α, β) comprend une ou aucune racine, se présentent tous les

posons, par exemple, que la fonction $f(x)$ ait la propriété née par l'équation

$$f(a+x) = f(b-x);$$

on verra facilement que, à chaque racine x_1 de $P_n(x) = 0$, corres- une racine $a + b - x_1$. Supposons de plus que $f(x)$ soit con- nent égale à zéro dans l'intervalle $\left(\frac{a+b}{2} - h, \frac{a+b}{2} + h\right)$; alors, t pair, il n'y aura aucune racine de $P_n(x)$ dans cet intervalle (parce ne peut y en avoir deux); mais si n est impair, la racine $\frac{a+b}{2}$ dans cet intervalle, et c'est la seule.

us allons maintenant démontrer la proposition suivante:

: (α, β) un intervalle quelconque, faisant partie de l'intervalle étendu (a, b) et tel que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

e valeur positive différente de zéro; alors, pour toutes les valeurs dessus d'une certaine limite, au moins une racine de $P_n(x) = 0$: dans cet intervalle (α, β).

nons un intervalle (α', β'), $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, tel que

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} f(x)\,dx = M,$$

nt une valeur positive, ce qui est possible, d'après la supposition ous avons faite.

Construisons maintenant un polynôme $T(x)$ d'un degré fini k, tel
e

$$\text{Val. abs. } T(x) < \varepsilon, \quad a \leqq x \leqq \alpha, \quad \beta \leqq x \leqq b,$$
$$T(x) \geqq 1, \quad \alpha' \leqq x \leqq \beta',$$

supposons de plus que $T(x)$ soit positif dans l'intervalle (α, α') et
ıs l'intervalle (β', β). Admettons pour un moment l'existence d'un
polynôme $T(x)$ d'un degré fini k, ε étant une quantité arbitraire.
ɔrs, lorque n est supérieur à $\frac{1}{2}k$, il y aura au moins une racine de
(x) dans l'intervalle (α, β).

Ɛn effet, supposons que cela n'eût pas lieu. Parce que $n > \frac{1}{2}k$, on
exactement

$$\int_a^b f(x)\, T(x)\, dx = A_1\, T(x_1) + \ldots + A_n\, T(x_n),$$

cette intégrale serait inférieure à

$$\varepsilon\,(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \varepsilon \int_a^b f(x)\, dx.$$

Mais, d'autre part, il est évident que la valeur de cette intégrale
supérieure à

$$M - \varepsilon \int_a^b f(x)\, dx,$$

qui implique contradiction, ε étant arbitraire.

Quant à l'existence du polynôme $T(x)$, on peut s'en convaincre
si qu'il suit:

Soit $F(x)$ une fonction continue, à un nombre fini de maxima et
ıima, dans l'intervalle (a, b). En posant

$$\frac{b + a - 2x}{b - a} = \cos\varphi,$$

aura

$$F(x) = \mathcal{G}(\varphi)$$

es limites $x = a$, $x = b$ correspondent à $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; $\mathcal{G}(\varphi)$ est
reloppable en une série telle que

$$\tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots,$$

ette série converge uniformément, c'est-à-dire qu'on peut prendre sez grand pour que

$$\mathcal{G}_1(\varphi) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos\varphi + \ldots + a_k \cos k\varphi$$

re, pour toutes les valeurs, de $\varphi = 0$ jusqu'a $\varphi = \pi$, moins que ε (φ). En introduisant x au lieu de φ, on aura ainsi un polynôme $F_1(x)$ legré k, tel que

$$\text{val. abs.}\,[F(x) - F_1(x)] < \varepsilon \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

l'aide de ce résultat, il est facile de voir qu'il existe, en effet, polynôme $T(x)$, doué des propriétés que nous avons supposées.

n résumant les résultats obtenus, nous pouvons conclure que, gmentant indéfinement, les intégrales

$$f(x)\,dx,\quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,\quad \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx, \ldots, \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx,\quad \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx$$

ergent toutes vers zéro, sans qu'on puisse dire la même chose différences

$$x_1 - a,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \ldots,\ x_n - x_{n-1},\ b - x_n.$$

après les inégalités (12), (13), on a

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k < \int_a^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1} > \int_a^{x_{k-1}} f(x)\,dx;$$

$$A_k < \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x)\,dx,$$

ui fait voir, d'après ce qui précède, que les A_k convergent vers avec $\frac{1}{n}$.

Application des résultats obtenus. — On ne saurait douter, il semble, que les propositions que nous avons obtenues seront

ın grand usage, si l'on veut étudier la question que nous avons sée au début de l'introduction.

Toutefois, en considérant l'intégrale

$$\int_a^b f(x) \mathrm{F}(x)\, dx,$$

; conditions à imposer aux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ deviennent la source difficultés qu'on ne saurait vaincre qu'à l'aide de nouvelles re-erches sur les principes mêmes du Calcul intégral.

Je me contenterai seulement de considérer un cas assez simple. ssujettissons la fonction $f(x)$ à cette nouvelle condition, qu'il n'existe s un intervalle (α, β) tel que

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0.$$

En posant

$$y = \int_a^x f(x)\, dx,$$

sera donc une fonction continue de x, toujours croissante, et, en sant

$$x = \psi(y),$$

fonction $\psi(y)$ sera de même continue et toujours croissante.

En introduisant y au lieu de x, il vient

$$\int_a^b f(x) \mathrm{F}(x)\, dx = \int_0^c \mathrm{F}[\psi(y)]\, dy, \quad c = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Déterminons maintenant les constantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ par

$$\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_k = \int_a^{\xi_k} f(x)\, dx;$$

aura, d'après (12) et (13),

$$x_k < \xi_k < x_{k+1}.$$

Désignons encore par y_k, η_k les valeurs de y correspondant aux

urs x_k, ξ_k de x, l'expression

$$A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)$$

endra

$$\eta_1 F[\psi(y_1)] + (\eta_2 - \eta_1) F[\psi(y_2)] + \ldots + (c - \eta_{n-1}) F[\psi(y_n)];$$

comme on a

$$0 < y_1 < \eta_1 < y_2 < \eta_2 < \ldots < \eta_{n-1} < y_n < c,$$

expression rentre dans celle qui sert de définition à $\int_0^c F[\psi(y)]\, dy$.
plus, d'après les recherches du n° 7, les intervalles deviennent iment petits avec $\frac{1}{n}$.

nsi encore, dans ce cas, la quadrature peut donner une approxi-on indéfinie, à la seule condition que $F(x)$ soit intégrable.

XXXII.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 99, 1884, 508—509.)

Sur un développement en fraction continue.

(Note, présentée par M. Tisserand.)

ʒupposons que $A_1 F(x_1) + A_2 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n)$ soit l'expression ›rochée de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$ donnée par la quadrature de Gauss.

)ans un Mémoire inséré dans les Annales de l'Ecole Normale ʒ4, p. 420) j'ai démontré les inégalités suivantes

$$. \; . \left\{\begin{array}{l} -1 < x_1 < -1 + A_1 < x_2 < -1 + A_1 + A_2 < x_3 < \ldots \\ \quad < -1 + A_1 + \ldots + A_{n-1} < x_n < +1. \end{array}\right.$$

;onsidérons maintenant la fraction continue

$$\Omega = \cfrac{2}{z - \cfrac{\frac{1.1}{1.3}}{z - \cfrac{\frac{3.3}{5.7}}{z - \cfrac{\frac{4.4}{7.9}}{z - \ddots}}}},$$

soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la réduite d'ordre n. On sait que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les ines de l'équation $Q_n = 0$, et la décomposition en fractions simples ıne

$$. \; . \; . \; . \; . \; \frac{P_n}{Q_n} = \frac{A_1}{z - x_1} + \frac{A_2}{z - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{z - x_n}.$$

ʒupposons que z ait une valeur quelconque réelle ou imaginaire, s non comprise dans l'intervalle réel $(-1, +1)$. Alors, en vertu

inégalités (1) et de la définition même d'une intégrale définie, cond membre de (2) converge, lorsque n augmente indéfiniment une limite déterminée qui n'est autre chose que l'intégrale ligne) $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z-x}$: donc

$$\lim \frac{P_n}{Q_n} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z-x}.$$

r conséquent, la fraction continue Ω converge dans tout le plan, xceptant la coupure rectiligne de -1 à $+1$.

n voit encore facilement que la fraction continue converge uniément dans le voisinage de toute valeur particulière appartenant région de convergence.

résultat est connu, mais la démonstration précédente semble simple; de plus, elle est applicable encore à la fraction con- que l'on obtient pour l'intégrale $\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$, $f(x)$ étant une tion qui ne devient pas négative dans l'intervalle (a, b).

XXXIII.

(Bull. astr., Paris, 1, 1884, 465—467.)

Note sur la densité de la Terre.

Nous considérons la Terre comme composée de couches ellipsoï-
les homogènes de révolution. Soient

x le demi-petit axe,
ϱ_x la densité d'une couche quelconque.

Nous prendrons pour unité de longueur la valeur de x à la sur-
e et nous désignerons par Δ la densité moyenne de la Terre, enfin
r λ la fraction

$$\frac{\int_0^1 x^2\,\varrho_x\,dx}{\int_0^1 x^4\,\varrho_x\,dx}.$$

Supposons connues les valeurs de Δ et de λ, ainsi que la valeur ϱ_1
la densité à la surface.

Dans ces conditions, il est possible de déterminer une limite in-
ieure de la densité ϱ_0 au centre, en admettant que ϱ_x ne croît
nais avec x.

Posons $A = \int_0^1 x^2\,\varrho_x\,dx$, $B = \int_0^1 x^4\,\varrho_x\,dx$, en sorte qu'on a

$$A = \frac{1}{5}\,\Delta,\quad B = \frac{\Delta}{3\,\lambda}.$$

Une intégration par parties donne

$$\ldots\ldots\ldots\quad 3\,A - \varrho_1 = -\int_0^1 x^3\,\varrho_x'\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\quad 5\,B - \varrho_1 = -\int_0^1 x^5\,\varrho_x'\,dx,$$

dis qu'on a évidemment

$$\ldots\ldots\ldots\quad \varrho_0 - \varrho_1 = -\int_0^1 \varrho_x'\,dx.$$

en déduit aussitôt

$$\ldots - \varrho_1)^3 (\varrho_0 - \varrho_1)^2 - (3\,A - \varrho_1)^5$$

$$= -\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^5 y^5 z^5 - x^3 y^3 z^3 t^3 u^3)\,\varrho_x'\,\varrho_y'\,\varrho_z'\,\varrho_t'\,\varrho_u'\,dx\,dy\,dz\,dt\,du.$$

La notation des variables étant arbitraire, on peut dans le second mbre permuter de toutes les manières possibles les lettres x, y, z, t, u. obtient ainsi en tout dix expressions du premier membre, et prenant la moyenne,

$$\ldots\left\{\begin{aligned}&(5\,B - \varrho_1)^3 (\varrho_0 - \varrho_1)^2 - (3\,A - \varrho_1)^5\\ &\quad = -\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 T\,\varrho_x'\,\varrho_y'\,\varrho_z'\,\varrho_t'\,\varrho_u'\,dx\,dy\,dz\,dt\,du,\end{aligned}\right.$$

$$T = \tfrac{1}{10}(\Sigma\, x^5 y^5 z^5) - x^3 y^3 z^3 t^3 u^3.$$

, si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont des nombres positifs, on voit facilement la valeur moyenne de tous les produits de ces nombres trois à is est supérieure à la troisième puissance de leur moyenne géo-trique $\sqrt[n]{a_1\,a_2\,\ldots\,a_n}$ En appliquant cette remarque aux cinq mbres x^5, y^5, z^5, t^5, u^5, on voit que T est toujours positif ou du ins jamais négatif. En y regardant de plus près, on trouve que est égal à zéro seulement dans les cas suivants:

1°. $x = y = z = t = u$;

2°. Quand au moins trois des nombres x, y, z, t, u s'évanouissent.

Mais, par hypothèse, la dérivée ϱ_x' n'est jamais positive: donc

$$(5\,B - \varrho_1)^3 (\varrho_0 - \varrho_1)^2 - (3\,A - \varrho_1)^5 \geqq 0$$

bien

$$\varrho_0 \geqq \varrho_1 + \sqrt{\frac{(3\,\mathrm{A} - \varrho_1)^5}{(5\,\mathrm{B} - \varrho_1)^3}},$$

t-à-dire

$$. \quad . \quad . \quad \varrho_0 \geqq \varrho_1 + \sqrt{\frac{(\Delta - \varrho_1)^5}{\left(\frac{5\,\Delta}{3\,\lambda} - \varrho_1\right)^3}} = \varrho_1 + (\Delta - \varrho_1)\sqrt{\left(\frac{\Delta - \varrho_1}{\frac{5\,\Delta}{3\,\lambda} - \varrho_1}\right)^3}.$$

:n adoptant pour Δ la valeur 5,56 d'après MM. Cornu et Baille mptes rendus, t. LXXVI) et $\varrho_1 = 2{,}6$, $\lambda = 1{,}9553$, la dernière va- étant empruntée à M. Tisserand (Bull. astr., t. I., p. 419), on ent $\varrho_0 \geqq 7{,}418$.

convient de remarquer que la limite inférieure que nous venons otenir ne saurait être remplacée par une autre plus élevée, parce elle correspond à la distribution suivante de la masse de la Terre:

$\varrho_x = \varrho_0$, de $x = 0$ jusqu'à une certaine valeur $x = a < 1$,
$\varrho_x = \varrho_1$, de $x = a$ jusqu'à $x = 1$.

)n trouve alors

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{A} &= \varrho_0 x^3 + \varrho_1 (1 - x^3), \\ 5\,\mathrm{B} &= \varrho_0 x^5 + \varrho_1 (1 - x^5) \end{aligned}$$

bien

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{A} - \varrho_1 &= x^3 (\varrho_0 - \varrho_1), \\ 5\,\mathrm{B} - \varrho_1 &= x^5 (\varrho_0 - \varrho_1). \end{aligned}$$

:es deux équations déterminent les inconnues ϱ_0 et x, et il est ble que la valeur de ϱ_0 qu'on en déduit coïncide avec la limite rieure que nous venons d'obtenir.

.a valeur de x

$$x = \sqrt{\frac{5\,\mathrm{B} - \varrho_1}{3\,\mathrm{A} - \varrho_1}} = \sqrt{\frac{\frac{5\,\Delta}{3\,\lambda} - \varrho_1}{\Delta - \varrho_1}}$$

ant être inférieure à l'unité, on doit avoir $\lambda > \frac{5}{3}$, ce qu'on voit si par l'inspection des formules (1) et (2).

XXXIV.

(Amsterdam, Versl. K. Akad. Wet. sér. 3, 1, 1885, 272—297).
(réimprimé: Haarlem, Arch. Néerl. Sci. Soc. Holl., 19,
1884, 435—460.)

Quelques remarques sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre.

Introduction.

Considérons la terre comme formée de couches ellipsoïdales, que la densité f soit constante dans l'étendue de chacune d'elles de ces couches sera déterminée par le rayon x de la sphère alente et nous supposerons qu'à la surface on ait $x = 1$.

uit de ces notations que le volume de la terre est $\frac{4}{3}\pi$, sa masse $\pi \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$. Donc la densité moyenne $\Delta = 3 \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$.

s ce qui suit, je suppose connu Δ, ainsi que le rapport

$$\lambda = \frac{\int_0^1 x^2 f(x)\, dx}{\int_0^1 x^4 f(x)\, dx},$$

on peut obtenir la valeur en combinant les observations astroues avec celles qui servent à faire connaître la figure de la

in, comme dernière donnee, je prendrai la valeur de la densité urface: $f(1) = d$.

s ces conditions mon but est de limiter, autant que possible, rche de la fonction inconnue $f(x)$. Cela n'est possible qu'à l'aide taines hypothèses: les deux suivantes seront discutées succesent.

I. La densité va continuellement en croissant de la surface jus-'au centre de la terre.

II. La densité va continuellement en croissant de la surface jus-'au centre, mais la rapidité de cet accroissement va en diminuant la surface jusqu'au centre.

Enfin, dans une troisième partie, je considérerai brièvement la mise nombres des résultats obtenus, et j'ajouterai une discussion de férentes formules qu'on a proposées pour représenter la densité ns l'intérieur de la terre.

Mais, avant d'entrer en matière, voici quelques remarques pré-ninaires qui se rapportent également à la discussion des deux pothèses.

D'abord il convient d'introduire au lieu de Δ et λ les intégrales

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad B = \int_0^1 x^4 f(x)\, dx,$$

sorte qu'on a $A = \frac{\Delta}{3}$, $B = \frac{\Delta}{3\lambda}$.

Ensuite, démontrons la proposition suivante:

„Lorsque deux fonctions $F(x)$, $G(x)$ vérifient les équations

$$) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_0^1 x^2 F(x)\, dx = A, \int_0^1 x^4 F(x)\, dx = B,$$

$$) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_0^1 x^2 G(x)\, dx = A, \int_0^1 x^4 G(x)\, dx = B,$$

ors la différence $F(x) - G(x)$, si elle n'est pas constamment égale zéro, doit changer au moins deux fois de signe dans l'intervalle zéro à l'unité".

En effet les équations (3) et (4) donnent

$$) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_0^1 x^2 [F(x) - G(x)]\, dx = 0,$$

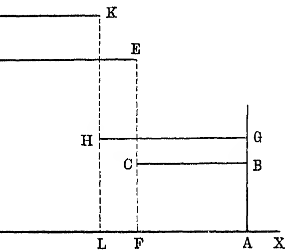
$$) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \int_0^1 x^4 [F(x) - G(x)]\, dx = 0,$$

où il est évident que $F(x) - G(x)$ doit changer de signe au moins ne fois.

ne on le voit par les inégalités (7), la valeur de a est inférieure ité; quant à $m = d + \frac{3A - d}{a^3}$, à cause de $a < 1$ il vient $m > 3A$, à-dire m est supérieur à la densité moyenne de la terre, ce st évident à priori.

prenant (Fig. 1) un système d'axes rectangulaires OX, OY, $=1$, $OF = a$, $OD = m$, $AB = d$, cette loi de densité est représentée par les deux droites DE, CB. Or il est évident maintenant que m est la densité minima au centre, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune loi de densité qui donne pour $x = 0$ une densité inférieure à m. En effet, désignons par $f(x)$ la loi de densité représentée par DE, CB, et par $f_1(x)$ une autre loi de densité, qui donnerait au centre une densité

Fig. 1.



eure à m; on voit aussitôt que $f(x) - f_1(x)$ ne pourrait pré- r qu'un seul changement de signe, ce qui est impossible d'après oposition du n° 1.

Dans la suite, la limite inférieure de la densité pour $x = b$ désignée par $t(b)$ et la limite supérieure de cette même densité (b). Le résultat que nous venons d'obtenir s'exprime donc : $t(0) = m$, tandis qu'on a évidemment $t(1) = d$, $T(1) = d$.

ous nous proposons de déterminer ces fonctions $t(b)$, $T(b)$ pour valeur quelconque de b.

abord il est évident, en jetant un regard sur la Fig. 1, que

$$t(b) = d, \qquad a \leqq b \leqq 1,$$

l'aide d'un raisonnement, tout-à-fait analogue à celui qui nous voir que $t(0) = m$, on se convainc que

$$T(a) = m.$$

La fonction $t(b)$ étant connue maintenant pour les valeurs de b omprises entre a et l'unité, il reste seulement à trouver la valeur e $t(b)$ pour les valeurs positives de b inférieures à a. (Nous savons éjà que $t(0) = m$).

Pour cela, je cherche une fonction $F(x)$, ainsi

$$F(x) = K, \qquad 0 < x < b,$$
$$F(x) = k, \qquad b < x < 1,$$

et k étant des constantes qui doivent être déterminées par les onditions (3). Un calcul facile donne

$$K = \frac{3(1-b^5)A - 5(1-b^3)B}{b^3(1-b^2)},$$
$$k = \frac{5B - 3b^2 A}{1-b^2}.$$

La valeur de k, considérée comme fonction de b, est décroissante, comme on voit facilement que pour $b = a$ il vient $k = d$, la valeur e k sera supérieure à d dans l'hypothèse actuelle $0 < b < a$. D'après proposition du n° 1 on en conclut $K > m$. Dans la Fig. 1 la fonc-on $F(x)$ est représentée par les droites IK et HG, et b par OL.

On voit maintenant, d'après un raisonnement déjà développé plus une fois, qu'il ne peut exister une loi de densité qui donne pour $= b$ une densité inférieure à k ou supérieure à K; donc $t(b) \geqq k$, $(b) \leqq K$.

La fonction $F(x)$ n'est pas, à proprement parler, une fonction qui uisse être assimilée à la densité, parce qu'on a $T(1) = k > d$. Mais n peut se figurer une loi de densité qui diffère très peu de $F(x)$ ans tout l'intervalle de zéro à l'unité et qui présente seulement ans le voisinage de la surface un changement extrêmement rapide e k à d.

D'après cette remarque, on doit avoir: $t(b) = k$, $T(b) = K$, c à d.

$$t(b) = \frac{5B - 3b^2 A}{1-b^2}, \qquad T(b) = \frac{3(1-b^5)A - 5(1-b^3)B}{b^3(1-b^2)}$$

ous la condition $0 < b \leqq a$.

La fonction $t(b)$ est maintenant parfaitement connue. Remarquons

e présente une discontinuité; en effet, ε étant infiniment petit,

$$t(\varepsilon) = 5\,\mathrm{B} < 3\,\mathrm{A}$$

$$t(0) = m > 3\,\mathrm{A}.$$

te singularité s'explique très bien si l'on fait attention à la e différence qui existe entre les deux lois de densité qui don- la densité minima au centre et la densité minima dans un point du centre.

Il reste à déterminer $\mathrm{T}(b)$ pour les valeurs de b comprises a et 1. J'observe pour cela que

$$\mathrm{B} = \int_0^b x^4 f(x)\,dx + \int_b^1 x^4 f(x)\,dx,$$

$$\mathrm{B} \geqq f(b)\int_0^b x^4\,dx + f(1)\int_b^1 x^4\,dx,$$

$$\mathrm{B} \geqq \tfrac{1}{5}\,b^5 f(b) + \frac{1-b^5}{5}\,d,$$

onséquent

$$f(b) \leqq \frac{5\,\mathrm{B} - (1-b^5)\,d}{b^5}.$$

st évident par là qu'on doit avoir aussi

$$\ldots\ldots\quad \mathrm{T}(b) \leqq \frac{5\,\mathrm{B} - (1-b^5)\,d}{b^5}.$$

st une simple limitation de $\mathrm{T}(b)$, qu'on pourrait facilement er dans l'intervalle $0 < b \leqq a$ où nous connaissons déjà la valeur e de $\mathrm{T}(b)$. On voit aussi que pour $b = a$ il faut mettre le signe $=$ la relation (10).

is je dis maintenant qu'on a pour toute valeur de b comprise a et 1

$$\mathrm{T}(b) = \frac{5\,\mathrm{B} - (1-b^5)\,d}{b^5}.$$

ır le démontrer en toute rigueur, il faudrait faire voir que,

tant une quantité inférieure à $\frac{5\,\mathrm{B}-(1-b^5)\,d}{b^5}$ mais en différant si peu qu'on le veut, il existe toujours une loi de densité telle $f(b)=\mathrm{R}$. Mais il me semble que l'indication suivante suffit.

oit

$$\varphi(x)=\frac{5\,\mathrm{B}-(1-b^5)\,d}{b}, \qquad 0 \leqq x \leqq b,$$
$$\varphi(x)=d, \qquad b \leqq x \leqq 1,$$

vérifie sans peine que

$$\int_0^1 x^4\,\varphi(x)\,dx=\mathrm{B}.$$

désignant par A′ la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^2\,\varphi(x)\,dx$, on trouve

$$\mathrm{A}'=\frac{5\,\mathrm{B}-d+b^2\,d}{3\,b^2}.$$

onsidérée comme fonction de b, A′ est décroissante, et pour a, $\mathrm{A}'=\mathrm{A}$; donc, dans la supposition $a<b<1$, A′ est inférieure .

a fonction $\varphi(x)$ ne satisfait donc pas aux conditions imposées à lensité, mais en posant

$$f(x)=\varphi(x), \qquad \varepsilon<x<1,$$
$$f(x)=\varphi(x)+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{A}'}{\varepsilon\,x^2}, \qquad 0<x<\varepsilon,$$

ant une quantité aussi petite qu'on voudra, il vient

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\mathrm{A}'+\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{A}-\mathrm{A}'}{\varepsilon}\,dx=\mathrm{A},$$
$$\int_0^1 x^4 f(x)\,dx=\mathrm{B}+\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{A}-\mathrm{A}'}{\varepsilon}\,x^2\,dx=\mathrm{B}+\tfrac{1}{3}(\mathrm{A}-\mathrm{A}')\,\varepsilon^2.$$

n prenant ε infiniment petit, la fonction $f(x)$ satisfait donc bien conditions imposées à la densité et l'on a $f(b)=\frac{5\,\mathrm{B}-(1-b^5)\,d}{b^5}$.

'une manière sommaire, mais peu exacte, on pourrait dire que, r avoir la plus grande densité pour $x=b>a$, il faut se figurer

me condensée dans le centre de la terre une partie finie de la se totale de la terre. Cette partie de la masse a alors une in-ıce appréciable dans l'intégrale $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$, mais elle ne change rien la valeur de $\int_0^1 x^4 f(x)\,dx$, à cause du facteur x^4.

n réunissant les résultats obtenus, on a les formules suivantes

$$\left\{\begin{array}{ll} t(0)=m, & \\ t(b)=\dfrac{5\,\mathrm{B}-3\,b^2\,\mathrm{A}}{1-b^3}, & 0<b\leqq a, \\ t(b)=d, & a\leqq b\leqq 1, \end{array}\right. \quad \ldots\ldots$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{T}(b)=\dfrac{3\,(1-b^5)\,\mathrm{A}-5\,(1-b^3)\,\mathrm{B}}{b^3\,(1-b^2)}, & 0<b\leqq a, \\ \mathrm{T}(b)=\dfrac{5\,\mathrm{B}-(1-b^5)\,d}{b^5}, & a\leqq b<1. \\ \mathrm{T}(1)=d. & \end{array}\right. \quad \ldots\ldots$$

a fonction $\mathrm{T}(b)$ présente une discontinuité; en effet, ε étant in-ıent petit, on a

$$\mathrm{T}(1-\varepsilon)=5\,\mathrm{B}>d,$$
$$\mathrm{T}(1)=d.$$

Deuxième partie.

Discussion de l'hypothèse II.

Dans ce qui suit, nous admettrons:

que la fonction $f(x)$ ne croît jamais avec x,

que la fonction $\dfrac{df(x)}{dx}$ ne croît jamais avec x.

uant à cette seconde condition, elle semble exiger l'existence a fonction dérivée $\dfrac{df(x)}{dx}$; pour cette raison, il vaut mieux ɔncer un peu autrement, en disant que, sous la condition

$$0\leqq x<y<z\leqq 1,$$

loit avoir toujours

$$\ldots\ldots\ldots \quad \frac{f(x)-f(y)}{y-x}\leqq\frac{f(y)-f(z)}{z-y}.$$

otons une différence profonde qui existe entre notre hypothèse lle et celle que nous venons de discuter Dans la première hy· ıèse, la fonction $f(x)$ peut avoir un saut brusque pour une valeur onque de x; on voit facilement que cela n'est plus possible tenant, à cause de la condition (13), que pour la seule valeur .

yons d'abord quelles relations l'hypothèse actuelle entraîne entre onnées A, B, d.

turellement, on a comme auparavant, $3A>5B>d$, mais il existe e une autre relation, propre à notre hypothèse. Pour la trouver, dérons la fonction $F(x)$, qui s'est présentée déjà dans le n⁰ 2

$$F(x) = 30\,A - 45\,B - 12\,(3\,A - 5\,B)\,x$$

ıi vérifie les relations

$$\int_0^1 x^2\,F(x)\,dx = A, \quad \int_0^1 x^4\,F(x)\,dx = B.$$

tte fonction $F(x)$ décroît de $M = F(0) = 30\,A - 45\,B$ jusqu'à $F(1) = 15\,B - 6\,A$.

dis maintenant que la valeur $d = f(1)$ doit être inférieure à $15\,B - 6\,A$. C'est ce qu'on voit facilement en jetant le regard a Fig. 2, où la fonction $F(x)$ est représentée par droite FE, et rappelant que la différence $F(x) - f(x)$ doit changer au moins fois de signe d'après la proposition du n⁰. 1. Cela se fonde a notion qu'on a d'une courbe qui tourne sa concavité vers car c'est par une telle courbe qu'est représentée la fonction d'après notre hypothèse. Mais voici une démonstration arith- ue. Supposons $d > D$, alors $F(x) - f(x)$ est négative pour $x = 1$, mme cette différence doit changer au moins deux fois de signe, t exister un nombre $a < 1$ tel que $F(a) - f(a) > 0$, et un nombre tel que $F(b) - f(b) < 0$, donc

$$\begin{aligned} F(1) &< f(1), \\ F(a) &> f(a), \\ F(b) &< f(b), \end{aligned}$$

l'on tire

$$\frac{F(a) - F(1)}{1 - a} > \frac{f(a) - f(1)}{1 - a}, \qquad \frac{F(b) - F(a)}{a - b} < \frac{f(b) - f(a)}{a - b},$$

is évidemment

$$\frac{F(a)-F(1)}{1-a}=\frac{F(b)-F(a)}{a-b},$$

nc

$$\frac{f(b)-f(a)}{a-b}>\frac{f(a)-f(1)}{1-a},$$

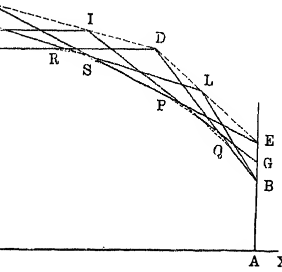
qui est en contradiction avec la relation (13), en posant, comme st permis de le faire, $x=b$, $y=a$, $z=1$. La supposition $d>D$ peut être admise, et nous pouvons noter les conditions

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} 3A>5B>d, \\ 15B-6A>d. \end{cases}$$

On voit encore que, si l'on avait $15B-6A=d$, la fonction $f(x)$ it parfaitement définie et devrait être identique à $F(x)$; nous ns abstraction de ce cas, qui ne se présente pas dans la nature [1]). Nous allons nous occuper maintenant du même problème qui a à été resolu dans notre première hypothèse — c. à d. nous allons rcher la limite supérieure $T(b)$ et la limite inférieure $t(b)$ de la sité pour $x=b$.

. Considérons d'abord les valeurs particulières $T(0)$, $t(0)$. La Fig. 2 fait voir immédiatement que $T(0)$ n'est autre chose que la valeur de la fonction $F(x)$, considérée dans le n⁰ précédent pour $x=0$, donc

Fig. 2.



(15) . . $T(0)=M=30A-45B.$

Quant à la valeur de $t(0)$, que nous désignerons par m, on voit sans peine qu'elle correspond à la loi de densité suivante: une densité constante m de $x=0$ jusqu'à une certaine valeur

[1]) En introduisant Δ et λ au lieu de A et B, la limitation $15B-6A>d$ peut se mettre la forme $\lambda<\frac{5\Delta}{2\Delta+d}$. Adoptant les valeurs $\Delta=5{,}56$ et $d=2.6$, il vient $\lambda<2{,}026$, s qu'on a $\lambda=1.87$, avec une erreur que j'estime ne pouvoir dépasser notablement 0.06·

$a < 1$, représentée dans la Fig. 2 par la droite horizontale CD, our $x > a$ un décroissement régulier de la densité jusqu'à la r d représentée par la droite DB, donc

$$f(x) = m, \qquad 0 < x < a,$$
$$f(x) = m - \frac{m-d}{1-a}(x-a), \quad a < x < 1.$$

ais il faut faire voir qu'on obtient une détermination convenable deux inconnues m et a par les équations (1) et (2). Or on obtient quelques réductions qui se présentent d'elles-mêmes

$$12\,\mathrm{A} - 4\,d = (1+a)(1+a^2)(m-d),$$
$$30\,\mathrm{B} - 6\,d = (1+a)(1+a^2+a^4)(m-d),$$

pour la détermination de a

$$\ldots \quad \frac{1+a^2+a^4}{1+a^2} = \frac{15\,\mathrm{B} - 3\,d}{6\,\mathrm{A} - 2\,d} = \frac{3(5\,\mathrm{B} - d)}{2(3\,\mathrm{A} - d)}.$$

nembre tout connu est supérieur à l'unité mais inférieur à $\frac{3}{2}$ ès les inégalités (14), tandis qu'on voit facilement que l'expres- $\frac{1+a^2+a^4}{1+a^2}$ varie de 1 à $\frac{3}{2}$, en croissant constamment, quand ie de 0 à 1. Donc l'équation (16) détermine une valeur unique , comprise entre 0 et 1.

rès avoir calculé a, on trouve m à l'aide de

$$\ldots \quad m = d + \frac{12\,\mathrm{A} - 4\,d}{(1+a)(1+a^2)},$$

cause de $a < 1$ on voit que $m > 3\,\mathrm{A}$, c. à d m est supérieur à nsité moyenne de la terre, ce qui est evident à priori.

Voici maintenant comment on obtient la valeur de $\mathrm{T}(b)$ pour valeur quelconque de b. Supposons d'abord b comprise entre et la valeur a déterminée dans le n⁰ précédent.

it

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{K}, \qquad 0 < x < b,$$
$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{K} - h(x-b), \quad b < x < 1$$

éterminons les constantes K, h par les conditions (3).

On obtient

$$K = \frac{6(5 - 6b + b^6)A - 15(3 - 4b + b^4)B}{1 - 3b^4 + 2b^6},$$

$$h = \frac{36A - 60B}{1 - 3b^4 + 2b^6}.$$

Dans la Fig. 2 cette fonction $F(x)$ est représentée par la ligne brisée G, et l'on trouve

$$F(1) = AG = \frac{15(1 + b^2)B - 6(1 + b^2 + b^4)A}{1 + b^2 - 2b^4}.$$

mme on voit, h est positif et croît avec b. Quant à la valeur de), elle décroît avec b. C'est ce qui résulte de l'expression

$$F(1) = \frac{5B - 3pA}{1 - p} = 3A - \frac{3A - 5B}{1 - p},$$

$p = \frac{2(1 + b^2 + b^4)}{3(1 + b^2)}$ est une fonction croissante.

De ce que h croît et $F(1)$ décroît avec b on peut conclure, d'après proposition du n^0 1, que K est décroissant. On pourrait aussi s'en vaincre directement.

l est évident maintenant que pour $b = 0$ la droite IG se confond c FE, et pour $b = a$ elle se confond avec DB. Le point G se it donc de E vers B, en sorte que $F(1)$ ne devient pas inférieur à d.

On voit maintenant immédiatement qu'il ne peut exister une loi densité qui donne pour $x = b$ une densité supérieure à K; donc $) = K$, c. à d.

$$\ldots \quad T(b) = \frac{6(5 - 6b + b^6)A - 15(3 - 4b + b^4)B}{1 - 3b^4 + 2b^6}, \quad 0 \leqq b \leqq a.$$

Comme on le voit $T(a) = m$.

L'équation de la droite IG est

$$\ldots \quad \begin{cases} y = K - h(x - b), & \text{où} \\ K = \dfrac{6(5 - 6b + b^6)A - 15(3 - 4b + b^4)B}{1 - 3b^4 + 2b^6}, \\ h = \dfrac{36A - 60B}{1 - 3b^4 + 2b^6}. \end{cases}$$

e système de droites IG qu'on obtient en faisant varier b de 0 sera appelé le premier système de droites.

Supposons maintenant $a < b < 1$, et déterminons une loi de sité $f(x)$ ainsi

$$f(x) = \mathrm{K} - h(x - b), \qquad 0 < x < b,$$

$$f(x) = \frac{1}{1-b}[\mathrm{K} - d\,b - (\mathrm{K} - d)\,x], \qquad b < x < 1,$$

ésentée par la ligne brisée KLB de la fig. 2.

n déterminant K, h par les conditions (1), (2), on trouve

$$\mathrm{K} = \frac{30\,\mathrm{B} - 12\,b^2\,\mathrm{A} - (5 - b - 4\,b^2)\,d}{1 + b},$$

$$h = \frac{12\,(1 + b^2 + b^4)\,\mathrm{A} - 30\,(1 + b^2)\,\mathrm{B} + 2\,(1 + b^2 - 2\,b^4)\,d}{b^4}.$$

a valeur de K décroît avec b, comme on le voit en écrivant

$$\mathrm{K} = d + \frac{(30\,\mathrm{B} - 6\,d) - b^2\,(12\,\mathrm{A} - 4\,d)}{1 + b}.$$

u contraire, en observant que

$$h = 12\,\mathrm{A} - 4\,d - \frac{2\,(15\,\mathrm{B} - 6\,\mathrm{A} - d)}{q - 1},$$

$q = \frac{1 + b^2 + b^4}{1 + b^2}$ est une fonction croissante, on voit que la valeur h croît avec b.

est évident maintenant que pour $b = a$ la droite KL se confond c CD et $h = 0$. Pour des valeurs plus grandes de b, h est donc tif, et lorsque $b = 1$ la droite KL se confond avec FE.

est facile de s'assurer qu'il ne peut exister aucune loi de densité donne pour $x = b$ une densité supérieure à K, donc

$$\ldots \quad \mathrm{T}(b) = \frac{30\,\mathrm{B} - 12\,b^2\,\mathrm{A} - (5 - b - 4\,b^2)\,d}{1 + b}, \qquad a \leqq b < 1.$$

fonction T(b) est maintenant parfaitement connue; remarquons e présente une discontinuité: en effet, ε étant infiniment petit,

$$T(1-\varepsilon) = 15\,B - 6\,A > d,$$
$$T(1) = d.$$

représentant la fonction T(b) par une courbe, cette courbe se ose de deux arcs qui se rencontrent en D, où ils ont des tan- s distinctes. La tangente en F se confond avec la droite FE deux arcs sont convexes vers OA.

quation de la droite KL est

$$\left\{\begin{aligned} y &= K - h(x-b), \\ K &= \frac{30\,B - 12\,b^2\,A - (5 - b - 4\,b^2)\,d}{1+b}, \\ h &= \frac{12(1+b^2+b^4)\,A - 30(1+b^2)\,B + 2(1+b^2-2\,b^4)\,d}{b^4}. \end{aligned}\right. \qquad \text{où}$$

système des droites KL qu'on obtient en faisant varier b de sera appelé le second système de droites. On verra facilement 'intersection K se meut toujours dans le même sens de C vers F.

Il nous reste à déterminer la fonction $t(b)$, dont jusqu'à pré- nous connaissons seulement les valeurs particulières $t(0) = m$, d. Or cela ne semble pas possible d'une manière aussi directe elle qui nous a fait trouver la valeur de T(b). On verra aussi 'expression analytique de $t(b)$ est beaucoup plus compliquée lle de T(b).

ginons que dans la Fig. 2 on ait tracé les droites du premier second système. Ces droites occupent, dans leur ensemble, ertaine partie du plan, limitée inférieurement par une certaine e. Nous allons déterminer cette courbe, mais, pour motiver echerche qui pourrait sembler étrangère à notre objet, disons présent que cette courbe n'est autre chose que la représen- géométrique de la fonction $t(b)$.

demment, nous sommes amenés ainsi à la recherche des courbes ppes des deux systèmes de droites.

ourbe enveloppe du premier système de droites.

'équation d'une droite du premier système a déjà été donnée, ez (19). Pour avoir l'enveloppe, il faut prendre la dérivée par port à b et éliminer ensuite ce paramètre entre l'équation enue et l'équation primitive. On obtiendrait ainsi l'équation de courbe enveloppe, mais cela serait de peu d'importance pour re objet, et il est bien plus naturel d'exprimer seulement les rdonnées x, y de la courbe par le paramètre b, dont on connaît signification. Les équations étant linéaires en x et y, ce calcul aucune difficulté et l'on obtient

$$) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x = \dfrac{10 + b^2 + b^4}{12}, \qquad 0 \leqq b \leqq a, \\ y = \dfrac{5\,\mathrm{B} - 3\,b^2\,\mathrm{A}}{1 - b^2}. \end{cases}$$

l est remarquable que l'expression de x ne contient ni A, ni B. obtient les extrémités P, Q de l'arc courbe, situées sur les droites , D B, en posant $b = 0$ et $b = a$. L'abscisse du point P est donc celle de Q est $= \dfrac{10 + a^2 + a^4}{12}$ et par conséquent inférieure à l'unité.

ourbe enveloppe du second système de droites. On peut suivre la même e pour obtenir cette seconde courbe, en partant de l'équation (21) obtient par un calcul un peu laborieux, mais qui ne présente s de difficulté

$$) \quad . \quad \begin{cases} (1 + b)^2\,(4 + 2\,b^2)\,x = 3\,b + 6\,b^2 + 4\,b^3 + 2\,b^4, \qquad a \leqq b \leqq 1 \\ b^3\,(1 + b)^2\,(4 + 2\,b^2)\,y = \\ \quad = 12\,(1 + 2\,b + 3\,b^2 + 4\,b^3 + 5\,b^4)\,\mathrm{A} - 30\,(1 + 2\,b + 3\,b^2)\,\mathrm{B} + \\ \quad + 2\,(1 + b)\,(1 - b)^2\,(1 + 3\,b + 7\,b^2 + 3\,b^3 + b^4)\,d. \end{cases}$$

Ici encore l'expression de x ne contient point les données A, B, d. On obtient les extrémités R, S de l'arc courbe, situées sur les ites C D, F E, en posant $b = a$ et $b = 1$. L'abscisse du point R est sitive, celle de S est $\frac{5}{8}$.

D'après cela, la limite inférieure de la partie du plan occupée r les droites du premier et du second système se compose des 5 rties suivantes :

1⁰ la droite horizontale C R,

2⁰ l'arc courbe R S,

3⁰ la droite inclinée S P,

4⁰ l'arc courbe P Q,

5⁰ la droite inclinée Q B.

ıs allons faire voir maintenant que cette ligne C R S P Q B est nent la représentation géométrique de la fonction cherchée upposons qu'on trace la ligne $y = f(x)$ et nommons cette ligne ɔurbe de densité. Alors nous devons montrer qu'aucune courbe ısité n'est possible qui pénètre dans la partie du plan au-dessous S P Q B.

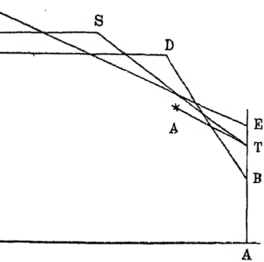
Voici d'abord quelques observations préliminaires:

Une courbe de densité (qui commence toujours en B), ne peut en B une inclinaison plus faible sur l'axe O A que la ligne B D. est évident parce qu'elle doit couper en deux points la ligne C D B, d'après la proposition du n⁰ 1.

Toute courbe de densité doit couper en deux points la droite

suivant une courbe de densité de B vers l'axe O Y, l'inclinaison angente sur O A va toujours en diminuant, d'après notre hypo- Il est évident par là que l'inclinaison de cette tangente sur- celle de E F pour la partie de la courbe entre B et la première intersection avec E F, tandis que l'inclinaison de la tangente est plus faible que celle de E F pour la partie de la courbe entre le second point d'intersection avec EF et l'axe O Y.

Fig. 3.



Supposons maintenant qu'il existe une courbe de densité dont un point A est situé au-dessous de la courbe C R S P Q B.

Je distingue deux cas:

Le point A se trouve entre B et la première intersection de rbe avec E F. (Fig. 3).

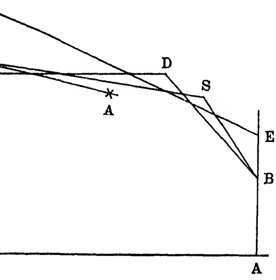
ors la tangente en A doit couper la ligne BE dans un point T
ssous de E parce que l'inclinaison de la tangente est plus forte
celle de EF. Mais ce point T doit se trouver au-dessus de B et
eut se confondre avec B, car dans ce dernier cas la courbe de
té entre A et B devrait se confondre avec sa tangente AB, ce
st impossible d'après (A).

intenant par le point T passe une droite du premier système
qu'on peut compléter par une droite horizontale SU de manière
enir une ligne brisée TSU, représentation d'une fonction $F(x)$
atisfait aux conditions (3)[1].

la courbe de densité se trouve située entièrement au-dessous
a tangente TA, par conséquent elle ne peut couper la droite
Quant à la droite horizontale SU, elle ne peut la couper qu'en
eul point. Mais, d'après la proposition du n⁰ 1, chaque courbe
ensité doit avoir au moins deux intersections avec TSU, par
équent il ne peut exister une courbe de densité avec le point
-dessous de CRSPQB.

Le point A se trouve entre la seconde intersection de la courbe de densité avec EF et l'axe OY (Fig. 4). Alors la tangente en A doit couper OY en un point T au-dessous de F, parce que l'inclinaison de cette tangente sur OX est plus faible que celle de EF. Le point T se trouve naturellement au-dessus de C, parce que la courbe elle-même vient rencontrer l'axe OY au-dessus de C.

Fig. 4.



Maintenant il passe par T une
e TS du second système, et joignant S et B par une droite,
eut regarder TSB comme une courbe de densité. Mais évidem-

[1] La droite TS doit avoir naturellement une inclinaison sur OX plus forte que celle
, parce qu'on suppose que A se trouve dans la partie du plan au-dessous de la courbe
des droites du premier système.

nt la courbe de densité passant par A ne peut couper la droite , et l'on se trouve de nouveau en contradiction avec la propo- on du n° 1.

En somme il ne peut exister aucune courbe de densité qui pénètre s la partie du plan au-dessous de CRSPQB et cette courbe est nc bien, comme nous l'avons annoncé, la représentation géomé- ue de la fonction $t(b)$.

Voici maintenant la détermination analytique de la fonction $t(b)$. Nommons x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des points R, S, P, Q:

$$x_1 = \frac{3a + 6a^2 + 4a^3 + 2a^4}{(1+a)^2(4+2a^2)}, \quad x_2 = \frac{5}{8}, \quad x_3 = \frac{5}{6}, \quad x_4 = \frac{10 + a^2 + a^4}{12}.$$

Alors on a

$$t(b) = m, \qquad 0 \leqq b \leqq x_1.$$

is lorsque b est comprise entre x_1 et x_2, il faut d'abord calculer quantité u comprise entre a et 1 à l'aide de l'équation du 4ième ré

$$(1+u)^2(4+2u^2)\,b = 3u + 6u^2 + 4u^3 + 2u^4,$$

l'on obtient $t(b)$ à l'aide de l'équation

$$\begin{aligned} u^3(1+u)^2(4+2u^2)\,t(b) = {} & 12(1+2u+3u^2+4u^3+5u^4)\,\mathrm{A} - 30(1+2u+3u^2)\,\mathrm{B} \\ & + 2(1+u)(1-u)^2(1+3u+7u^2+3u^3+u^4)\,d. \end{aligned}$$

a ensuite

$$t(b) = 30\,\mathrm{A} - 45\,\mathrm{B} - 12(3\,\mathrm{A} - 5\,\mathrm{B})\,b, \qquad x_2 \leqq b \leqq x_3.$$

Dans le quatrième intervalle $x_3 \leqq b \leqq x_4$, il faut calculer la quan- u comprise entre 0 et a à l'aide de

$$b = \frac{10 + u^2 + u^4}{12},$$

ensuite on a

$$t(b) = \frac{5\,\mathrm{B} - 3u^2\,\mathrm{A}}{1 - u^2}.$$

Enfin, dans le dernier intervalle $x_4 \leqq b \leqq 1$, on a

$$t(b) = m - \frac{m-d}{1-a}(b-a).$$

ıvais d'abord considéré seulement les limites de la densité au ·e de la terre, dans les deux hypothèses que nous venons de ıter complètement. En causant sur les résultats obtenus avec 3akhuyzen, celui-ci me suggéra l'idée de chercher des limites a densité dans un point quelconque de l'intérieur de la terre. ıe suis aperçu alors que ma méthode donnait encore facilement ›lution de ce problème plus général.

Troisième Partie.

. Pour la réduction en nombres des résultats obtenus par la ıssion de l'hypothèse II, j'adopterai les valeurs $d = 2.6$, $\Delta = 5.56$, lernier nombre étant celui donné par MM. Cornu et Baille nptes Rendus de l'Acad. d: Sc., Tome 76]. Quant à λ, cette conte est déterminée par la relation

$$\lambda = \frac{\frac{C-A}{C}}{\varepsilon - \frac{1}{2}\varphi},$$

A étant les moments d'inertie de la terre par rapport à l'axe ·otation et à un diamètre quelconque de l'équateur, ε l'aplatisent de la terre, φ le rapport de la force centrifuge à la pesan- à l'équateur. J'ai adopté la valeur

$$\frac{C-A}{C} = 0.00324256 \text{ [1)]}$$

ınue par M. Nyren dans son Mémoire sur la détermination de utation de l'axe terrestre. [Mém. de l'Acad. Impér. de St. Pétersb., Série, Tome XIX].

)uant à ε et φ, j'ai adopté les valeurs déduites par M Listing chrichte der Königl. Ges. d Wiss. zu Göttingen, 1877)

$$\varepsilon = 0.003466445 = 1 : 288.4800,$$
$$\varphi = 0.003467199 = 1 : 288.4179.$$

La légère différence entre ce nombre et celui qu'on trouve à la page 19 du Mémoire I. Nyren s'explique par la Note qu'on trouve à la page 54.

en déduit $\lambda = 1.8712$, mais j'ai adopté simplement

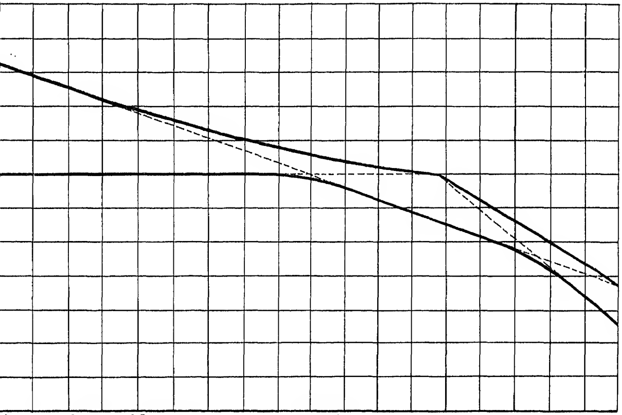
$$\lambda = 1.87.$$

nombre est certainement sujet à quelque incertitude; il me e pourtant difficile d'admettre que l'erreur surpasse notable- 0.06. J'ai donc calculé quelques valeurs numériques des fonc- T (b) et t (b) en adoptant les valeurs

$$d = 2.6, \ \Delta = 5.56, \ \lambda = 1.87,$$

comme une faible variation de λ a une influence notable sur ésultats, j'ai encore repris le même calcul avec la valeur 92.

Fig. 5.



ci maintenant les valeurs obtenues; la Fig. 5 donne la repré- ion graphique correspondant à la valeur $\lambda = 1.87$

$$\lambda = 1.87, \ a = 0.73985, \ m = 6.998, \ \mathrm{M} = 11.001, \ \mathrm{D} = 3.746.$$
$$\lambda = 1.92, \ a = 0.65416, \ m = 7.613, \ \mathrm{M} = 12.162, \ \mathrm{D} = 3.359.$$

$$\lambda = 1.87, \ x_1 = 0.50077, \ x_2 = \tfrac{5}{8}, \ x_3 = \tfrac{5}{6}, \ x_4 = 0.90392,$$
$$\lambda = 1.92, \ x_1 = 0.45278, \ x_2 = \tfrac{5}{8}, \ x_3 = \tfrac{5}{6}, \ x_4 = 0.88425.$$

	$\lambda = 1.87$		$\lambda = 1.92$	
	T (b)	t (b)	T (b)	t (b)
0	11.00	7.00	12.16	7.61
5	10.64	7.00	11.72	7.61
0	10.28	7.00	11.28	7.61
5	9.92	7.00	10.85	7.61
0	9.57	7.00	10.43	7.61
5	9.24	7.00	10.02	7.61
0	8.92	7.00	9.63	7.61
5	8.62	7.00	9.27	7.61
	8.34	7.00	8.93	7.61
5	8.08	7.00	8.62	7.61
0	7.84	7.00	8.33	7.51
5	7.63	6.90	8.07	7.24
0	7.44	6.64	7.84	6.87
5	7.27	6.29	7.63	6.44
0	7.11	5.92	7.05	6.00
5	6.87	5.56	6.43	5.56
0	6.24	5.20	5.81	5.12
5	5.62	4.83	5.20	4.68
0	4.99	4.29	4.58	4.05
5	4.37	3.45	3.97	3.32
0	2.60 (3.75)	2.60	2.60 (3.36)	2.60

Newton, en considérant la terre comme une masse fluide ogène, douée d'un mouvement de rotation, et en supposant la forme propre à l'équilibre est celle d'un ellipsoïde de révo- , a déterminé le rapport des axes du globe terrestre. En nom- φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, uve l'aplatissement égal à $\frac{5}{4}\varphi$.

airaut, dans sa „Théorie de la figure de la terre", a confirmé ce tat, et, en abandonnant l'hypothèse de l'homogénéité, il a é pour la première fois le moyen de déterminer l'aplatissement upposant donnée la loi de la variation de la densité. En sup-

t que la densité croît constamment à mesure qu'on s'approche
ntre de la terre, il arrive à ce résultat que l'aplatissement est
faible que dans l'hypothèse de l'homogénéité.

and, plus tard, les observations avaient montre d'une manière
ne que l'aplatissement du globe terrestre est, en effet, plus
que dans l'hypothèse d'une densité constante, il était naturel
roposer une loi de densité propre à donner l'aplatissement
vé.

paraît que la premiére hypothèse proposée est celle de Legendre,
Laplace a discutée plus tard dans la Mécanique céleste; elle
nt à supposer

$$f(x) = C \frac{\sin n x}{x}.$$

n déduit aisément

$$\Delta = 3 \int_0^1 x^2 f(x)\, dx = 3\, C \frac{\sin n - n \cos n}{n^2},$$

$$\lambda = \frac{\int_0^1 x^2 f(x)\, dx}{\int_0^1 x^4 f(x)\, dx} = \frac{n^2 (\sin n - n \cos n)}{(3\, n^2 - 6) \sin n - (n^3 - 6\, n) \cos n},$$

$$d = C \sin n.$$

près la théorie de Clairaut, l'aplatissement ε se détermine à
de

$$\varepsilon = \tfrac{5}{2}\, \varphi \,.\, \frac{\frac{3\,(1 - n \operatorname{cotg} n)}{n^2} - 1}{\frac{n^2}{1 - n \operatorname{cotg} n} - 2 - n \operatorname{cotg} n}.$$

adoptant la valeur $\Delta = 5.56$ et la valeur de φ donnée précé-
ient d'après Listing, j'ai calculé les valeurs de d, λ, ε pour
ues valeurs de n; — voici les résultats :

Hypothèse de Legendre.

n	d	λ	ε
136°	3.02	1.948	1 : 286.3
137	2.97	1.954	1 : 287.5
138	2.93	1.961	1 : 288.7
139	2.88	1.968	1 : 290.0
140	2.83	1.975	1 : 291.3
141	2.78	1.982	1 : 292.6
142	2.73	1.990	1 : 294.0
143	2.68	1.998	1 : 295.4
144	2.63	2.006	1 : 296.8
145	2.57	2.014	1 : 298.2
146	2.52	2.022	1 : 299.7

omme on le voit, l'hypothèse de Legendre ne peut pas représer suffisamment les faits observés Dans la Mécanique céleste, lace admet la valeur $n = 150°$, ce qui répond à la valeur 1 : 306.6 'aplatissement, qu'on ne peut plus admettre. On voit aissi qu'on ent ainsi une valeur beaucoup trop forte de λ.

a loi de Legendre $f(x) = C\frac{\sin nx}{x}$ ne satisfait pas à notre hypose II. On trouve que $f''(x)$ change de signe dans le voisinage de urface de la terre, en sorte que la courbe de densité présente inflection. Toutefois, la convexité vers l'axe O A est peu sen-e. Plus tard M. Roche a proposé la formule $f(x) = a - b\,x^2$, s je passerai directement à la loi plus générale

$$f(x) = a - b\,x^n,$$

posée par M. Lipschitz (Journal de Borchardt, Bd 62).

Dans cette hypothèse, l'équation différentielle du second ordre dépend l'aplatissement peut s'intégrer à l'aide de la fonction ergéométrique de Gauss. Les trois constantes a, b, n sont déter-ées à l'aide des trois données d, Δ, et $\frac{\varepsilon}{\varphi}$.

I. Lipschitz obtient une équation transcendante pour l'inconnue démontre par une analyse ingénieuse que cette équation admet

ule racine positive. Dès que n est connu, on obtient a et b s formules

$$a = \frac{(n+3)\,\Delta - 3\,d}{n},$$

$$b = \frac{(n+3)\,(\Delta - d)}{n}.$$

Lipschitz obtient ainsi

$$f(x) = 9.453 - 6.953\,x^{2.39},$$

ribuant à d, Δ, $\frac{\varepsilon}{\varphi}$ des valeurs qui diffèrent légèrement de que nous avons données plus haut. Comme on le voit, la donnée qui n'a pas été employée par M. Lipschitz, c'est la té λ. On peut donc avoir une vérification en calculant la de λ d'après la formule de M. Lipschitz. J'ai donc calculé la de λ en adoptant la valeur $\Delta = 5.56$ et les valeurs de ε et d'après Listing, pour différentes valeurs de d. J'ai obtenu [1])

d	λ
2.0	1.963
2.2	1.963
2.4	1.963
2.6	1.963
2.8	1.964
3.0	1.964

me on le voit, cette valeur de λ est un peu forte et à peu ndépendante de d. Mais la valeur de λ ne dépend pas des s absolues de d et Δ, mais seulement de leur rapport. On ut donc pas obtenir une valeur plus faible de λ en faisant Δ. Il reste seulement à chercher l'influence de l'aplatissement.

pu abréger beaucoup les calculs nécessaires à l'aide d'une formule que M. Tisserand oulu me communiquer et que l'on trouvera dans les Comptes Rendus de l'Acad. d. bre 13, 1884). Cette formule donne directement une valeur suffisamment approchée

résultats précédents supposent $\varepsilon = 1:288.48$, mais en posant : 280, $d = 2.6$ (les autres données restant les mêmes), il vient

$$\lambda = 1.927.$$

mme on le voit, dans toutes les hypothèses admissibles, on ndra toujours une valeur de λ un peu forte. Cela semble iner que la densité au centre est encore un peu plus faible et la diminution de la densité en s'éloignant du centre est encore lente, que ne le suppose la loi de M. Lipschitz.

XXXV.

(Bul. astr., Paris, 1, 1884, 568.)

---

lote sur quelques formules pour l'évaluation de certaines intégrales.

. semble que des trois formules suivantes

$$\int_{-1}^{+1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_0^\pi f(\cos\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left[\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]+\text{corr.},$$

$$\left\{\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,f(x)\,dx&=\int_0^\pi\sin^2\varphi\,f(\cos\varphi)\,d\varphi\\&=\frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{k=n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}\,f\left[\cos\frac{k\pi}{n+1}\right]+\text{corr.},\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,f(x)\,dx&=2\int_0^\pi\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,f(\cos\varphi)\,d\varphi\\&=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{k=n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\,f\left(\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)+\text{corr.},\end{aligned}\right.$$

remière (A) seule soit généralement connue. La correction est lorsque $f(x)$ est un polynôme en x du degré $2n-1$ au plus. n peut encore écrire ces formules sous la forme suivante

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{k=n}f\left[\cos^2\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right]+\text{corr.},$$

$$\int_0^1\sqrt{x(1-x)}\,f(x)\,dx=\frac{\pi}{4n+4}\sum_{k=1}^{k=n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}\,f\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n+2}\right)+\text{corr.},$$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,f(x)\,dx=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{k=n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\,f\left(\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)+\text{corr.}$$

Pour donner une application, prenons l'intégrale

$$Y = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)(1+kx)}\,dx,$$

rencontrée récemment par M. Seeliger dans une question relative à l'anneau de Saturne (Astron. Nachr., n° 2612), la constante k étant inférieure à l'unité. Lorsque $k = 1$, la valeur exacte de Y est

$$0{,}479256093894236 88\ldots$$

En posant maintenant $f(x) = \sqrt{1+x}$ dans la formule (B_1), on trouve

$$\begin{aligned} n &= 1, \quad \text{corr.} = -0{,}0017, \\ n &= 2, \quad \text{corr.} = -0{,}000015, \\ n &= 3, \quad \text{corr.} = -0{,}00000024, \\ n &= 5, \quad \text{corr.} = -0{,}0000000000080. \end{aligned}$$

Lorsque k est une fraction, les corrections sont encore plus petites; en prenant $n = 2$, on a donc

$$Y = \frac{\pi}{16}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{4}k} + \sqrt{1+\tfrac{3}{4}k}\right),$$

avec une erreur moindre que deux unités de la cinquième décimale.

XXXVI.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 99, 1884, 850—851.)

Sur une généralisation de la théorie des quadratures mécaniques.

(Note, présentée par M. Tisserand.)

oit $f(x)$ une fonction qui ne devient pas négative, dans l'intervalle éro à l'unité et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des nombres positifs inégaux nés; lorsque n est pair, égal à $2m$, le système des $2m$ équations

$$. . \quad \begin{cases} a_1 = \int_0^1 x^{\lambda_1} f(x)\,dx = A_1 x_1^{\lambda_1} + A_2 x_2^{\lambda_1} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_1}, \\ a_2 = \int_0^1 x^{\lambda_2} f(x)\,dx = A_1 x_1^{\lambda_2} + A_2 x_2^{\lambda_2} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{2m} = \int_0^1 x^{\lambda_{2m}} f(x)\,dx = A_1 x_1^{\lambda_{2m}} + A_2 x_2^{\lambda_{2m}} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_{2m}} \end{cases}$$

et une solution par des nombres positifs $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et des urs de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui sont positives, inégales et inférieures nité. Cette solution est unique, en faisant abstraction des per-ations qu'on peut effectuer simultanément sur les quantités $A_2, \ldots, A_m$ et $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

e même, lorsque $n = 2m + 1$, le système des équations

$$. . . . \quad a_k = A_1 x_1^{\lambda_k} + A_2 x_2^{\lambda_k} + \ldots + A_m x_m^{\lambda_k} + A_{m+1},$$

prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$, admet une solution unique, x_1, $\ldots, x_m$ étant positifs, inégaux et inférieurs à l'unité, $A_1, A_2, \ldots,$ A_{m+1} étant positifs.

Lorsque n est pair et qu'on prend $\lambda_k = k - 1$, on se trouve dans cas des quadratures mécaniques.

Voici maintenant une interprétation quasi mécanique des formules , en supposant qu'aucun des nombres λ_k ne soit égal à zéro. Soit une droite de longueur égale à 1. En attribuant à cette droite e densité $f(x)$ à la distance x de l'origine O, on peut considérer $a_2, \ldots, a_n$ comme des moments par rapport à l'origine O. Supsons maintenant qu'on fasse varier la distribution de la masse, de le manière que les moments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ restent constants. Dans conditions, il existe évidemment un minimum de la masse totale. ce minimum se présente lorsqu'on place des masses finies , $A_2, \ldots, A_m$ à des distances $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de l'origine O, et les uations (1) expriment alors simplement que les conditions imposées x moments se trouvent vérifiées.

Nous avons dit que, dans les formules (1), $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont égaux; mais, dans un cas spécial, il peut y avoir égalité entre elques-uns de ces nombres. Cela n'arrive toutefois que, quand la tribution primitive de masse, qui a servi a calculer $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nsiste en une concentration de masses finies dans un nombre de nts de O A inférieur à m. Alors cette distribution primitive corspond déjà au minimum. On peut aussi se figurer que, dans ce , quelques-unes des quantités $A_1, A_2, \ldots, A_m$ s'évanouissent.

Les équations (2) admettent une interprétation semblable: la masse $_{+1}$ se trouve alors à l'extrémité A de la droite.

D'après ce qui précède, on a, dans les deux cas,

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m \leqq \int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{m+1} \leqq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

XXXVII.

(Ann. Sci. Éc. norm., Paris, sér. 3, 2, 1885, 183—184.)

---

ote à l'occasion de la réclamation de M. Markoff[1]).

éponse à la réclamation de M. Markoff, je dois déclarer que c'est ent par lui que j'ai appris l'existence de l'article de M. Tcheby- ur les valeurs limites des intégrales (Journal de Liouville, 1874), rouve déjà l'énoncé des inégalités en question. Je regrette bien voir pas connu plus tôt ce travail.

reste, mes recherches ont été tout à fait indépendantes de celles I. Tchebychef et Markoff: en effet, mon travail a été remis à la tion des Annales de l'École Normale vers le milieu du mois de 84, et je viens d'apprendre que la livraison des Mathematische en contenant l'article de M. Markoff n'est arrivée ici à la biblio- de l'Université que dans la seconde moitié de septembre 1884. urellement, je reconnais volontiers que M. Markoff a, le premier, une démonstration des inégalités de M. Tchebychef.

eux profiter de cette occasion pour ajouter une remarque nou- u sujet traité dans mon Mémoire.

démonstration des inégalités de M. Tchebychef en forme bien artie essentielle; mais, pour le but que je me suis proposé, il as moins essentiel de démontrer que les A_k convergent vers zéro —. Ce point important, je l'ai démontré d'une manière indirecte m'appuyant sur le développement d'une fonction arbitraire par

---

[1]) a réclamation concerne le mémoire: Quelques recherches sur la théorie des quadratures caniques, N[0] XXXI.

série de Fourier. Il semble pourtant trés désirable d'établir cela ne manière plus simple et plus directe, mais mes efforts dans cette ection n'ont pas conduit au but désiré.

On peut voir, dans une Note que j'ai présentée à l'Académie des ences et qui se trouve dans les Comptes rendus du 22 septembre 1884, la question à laquelle je touche ici a une liaison intime avec la vergence d'une certaine fraction continue.

Voici maintenant une propriété nouvelle des coefficients A_k que j'ai contrée dans cette recherche.

Pour mettre en évidence la dépendance de $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$, du nbre entier n, je désignerai maintenant ces nombres par $A_1^n, A_2^n, \ldots$, ... Avec cette notation, je trouve qu'on a toujours

$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} < A_1^n + A_2^n + \ldots + A_k^n,$$
$$A_1^{n+1} + A_2^{n+1} + \ldots + A_k^{n+1} > A_1^n + A_2^n + \ldots + A_{k-1}^n.$$

XXXVIII.

(Acta Math., Stockholm, 6, 1885, 319—320.)

Un théorème d'algèbre.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

:i un théorème d'algèbre qui s'est présenté à moi en étudiant mules analytiques qui servent à exprimer le déplacement d'un e invariable autour d'un point fixe. (Voir Duhamel: Cours de que, introduction.)

nt

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}$$

fficients de deux substitutions orthogonales à déterminant $+1$ et

$$R = \begin{vmatrix} A+a & B+b & C+c \\ A'+a' & B'+b' & C'+c' \\ A''+a'' & B''+b'' & C''+c'' \end{vmatrix}$$

: déterminant R (qui visiblement n'est pas identiquement zéro) e cette propriété que lorsque $R=0$ en même temps tous ses s du second degré s'évanouissent. Je trouve en effet que le 'un tel mineur peut se mettre sous la forme

$$R \times \text{Fonction entière de } a, \ldots, c'', A, \ldots, C''.$$

a signification géométrique de ce théorème. Lorsque, par l'effet lacement, un seul point (x, y, z) vient dans la position $(-x,$ $z)$ cela entraîne nécessairement que tous les points d'un certain uissent de la même propriété. Le déplacement se ramène à une ı de 180° autour d'un certain axe. C'est du reste un cas d'ex-

ception qui échappe à l'analyse de M. Duhamel. Les formules de M. Duhamel cessent de déterminer l'axe de rotation (qui pourtant est parfaitement déterminé) parce qu'on a $p=0$, $q=0$, $r=0$. (On a $p^2+q^2+r^2=\sin^2\omega$ dans la notation de M. Duhamel.)

Ce théorème d'algèbre subsiste encore dans le cas de deux variables

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

et j'ai lieu de penser qu'il en est de même pour quatre variables, bien que je ne l'aie pas encore complètement démontré. Serait il donc possible de l'étendre à un nombre quelconque de variables? Ce sujet a quelque rapport au théorème de M. Brioschi, que l'équation

$$\begin{vmatrix} a+z & b & c & \ldots k \\ a' & b'+z & c' & \ldots k' \\ a'' & b'' & c''+z & \ldots k'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(n-1)} & b^{(n-1)} & c^{(n-1)} & \ldots k^{(n-1)}+z \end{vmatrix} = 0$$

a ses racines réciproques et imaginaires (abstraction faite de la racine $z=-1$ lorsque n est impair)[1].

---

[1]) Journ. de Liouville, t. 19. 1e sér. p. 253.

XXXIX.

(Acta Math., Stockholm, 6, 1885, 321—326.)

---

certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de Lamé.

Dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences de Berlin, 1864 (et dans son Traité des fonctions sphériques, tome I, p. s., 2^de^ édit.) M. Heine a démontré la proposition suivante.

ent A et B deux polynômes donnés en x, le premier du degré , le second du degré p au plus, ces polynômes étant d'ailleurs fait généraux et n'étant assujettis à aucune condition, et consis l'équation différentielle

$$\ldots\ldots\quad A\frac{d^2y}{dx^2}+2B\frac{dy}{dx}+Cy=0$$

st un polynôme en x du degré $p-1$ au plus.

rs il existe toujours certaines déterminations particulières du ôme C, telles que l'équation (1) admette comme intégrale un ôme en x du degré n. Le nombre de ces déterminations et des ômes correspondants y s'élève à

$$(n.p)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}$$

$$(n.1)=1.$$

éorème constitue le fondement principal de la théorie générale

es fonctions de Lamé qu'on doit à M. Heine. Dans cette théorie la nction B n'est pas indépendante de A, car l'on a $B = \frac{1}{4} \frac{dA}{dx}$. M. Heine it voir que la détermination du polynôme C dépend d'un système équations algébriques de degrés supérieurs et que l'équation finale ı'on obtient en éliminant toutes les inconnues sauf une, est au plus ı degré $(n.p)$. En outre on voit qu'à chaque détermination de C correspond un polynôme déterminé y du degré n.

Mais on voit moins facilement que le degré de l'équation finale d'où épend le polynôme C atteint effectivement le degré $(n.p)$. M. Heine levé cette difficulté en faisant voir par un calcul de proche en proche ıe, même en soumettant les polynômes A et B à certaines conditions ırticulières, il existe effectivement $(n.p)$ polynômes du degré n qui tisfont à une équation différentielle de la forme (1).

Je me propose de démontrer, dans ce qui suit, la proposition suiınte. Lorsque les racines $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ de l'équation $A = 0$ sont elles et inégales et qu'en posant

$$) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{B}{A} = \frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{\alpha_p}{x - a_p}$$

s quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont positives, alors les $(n.p)$ déterminations ı polynôme C sont toutes réelles ainsi que les polynômes corresponınts y du degré n. Soit y_1 un de ces derniers polynômes, les racines : $y_1 = 0$ sont réelles et inégales et distribuées dans les p intervalles :s racines de $A = 0$.

Le nombre des manières dont on peut distribuer n quantités dans p ervalles est évidemment égal à $(n.p)$ et j'ajoute maintenant que s racines des polynômes y représentent en effet toutes ces distribuons, en sorte qu'un tel polynôme est parfaitement caractérisé par la stribution de ses n racines dans les p intervalles des racines $a_0, a_1,$., a_p de $A = 0$.

2. Soient, sur un axe OX, $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points dont s abscisses sont $a_0, a_1, \ldots, a_p$ et prenons encore, dans un quelconque :s p intervalles déterminés par ces points (p. e. (A_0, A_1)), n points , $X_2, \ldots, X_n$ dont les abscisses sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cela posé,

dérons l'expression suivante, où l'on considère seulement les va- bsolues des distances des divers points :

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{l} [A_0 X_1 \times A_0 X_2 \times A_0 X_3 \ldots A_0 X_n]^{a_0} \\ \times [A_1 X_1 \times A_1 X_2 \times A_1 X_3 \ldots A_1 X_n]^{a_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \times [A_p X_1 \times A_p X_2 \times A_p X_3 \ldots A_p X_n]^{a_p} \\ \times X_1 X_2 \times X_1 X_3 \times X_1 X_4 \ldots \times X_1 X_n \\ \qquad\qquad \times X_2 X_3 \times X_2 X_4 \ldots \times X_2 X_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \times X_3 X_4 \ldots \times X_3 X_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times X_{n-1} X_n. \end{array} \right\}$$

te expression est toujours positive et s'évanouit seulement quand des points X_1, X_2, ..., X_n coïncident ou lorsqu'un de ces points se confondre avec l'une des limites de l'intervalle (A_0, A_1). En érant les points X_1, X_2, ..., X_n comme variables, mais restant rs dans l'intervalle (A_0, A_1), il est évident que les divers facteurs xpression Π restent compris entre certaines limites, et les expo- a_0, a_1, ..., a_p étant positifs, on voit que Π reste toujours infé- une certaine limite. Par conséquent, pour une certaine position ints X_1, X_2, ..., X_n l'expression Π devient maximum.

peut interpréter cela de la manière suivante. Concevons que les fixes $A_0, A_1, \ldots, A_p$ soient des points matériels, la masse de A_k a_k, et que de même les points mobiles (sur OX) X_1, X_2, ..., X_n des points matériels dont la masse soit égale à l'unité. Alors, si points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses, aison inverse de leur distance, log Π est le potentiel, et le um de Π correspond à une position d'équilibre stable.

s pour une position d'équilibre, dont l'existence résulte de ce écède (et qui est unique comme on le verra plus loin), on doit

$$\frac{a_0}{x_k - a_0} + \frac{a_1}{x_k - a_1} + \ldots + \frac{a_p}{x_k - a_p} + \frac{1}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + $$
$$+ \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_n} = 0.$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

J'observe maintenant qu'on a d'après (2)

$$\frac{a_0}{x_k - a_0} + \frac{a_1}{x_k - a_1} + \ldots + \frac{a_p}{x_k - a_p} = \frac{\mathrm{B}(x_k)}{\mathrm{A}(x_k)}$$

en posant

$$) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

vient

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{x - x_k} = \frac{1}{x - x_1} + \ldots + \frac{1}{x - x_{k-1}} + \frac{1}{x - x_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}$$

où

$$\left(\frac{y''}{2\,y'}\right)_{x = x_k} = \frac{1}{x_k - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_k - x_n}.$$

n voit donc que les conditions d'équilibre (3) reviennent à ce que xpression

$$\frac{y''}{2\,y'} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$

encore $\mathrm{A}\,y'' + 2\,\mathrm{B}\,y'$ s'évanouit pour $x = x_k$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Le polynôme $\mathrm{A}\,y'' + 2\,\mathrm{B}\,y'$ du degré $n + p - 1$ est donc divisible r y et en désignant le quotient par $-\,\mathrm{C}$ on a

$$\mathrm{A}\,y'' + 2\,\mathrm{B}\,y' + \mathrm{C}\,y = 0.$$

polynôme y du degré n défini par la relation (4) est donc un de ux dont l'existence fait l'objet de la proposition de M. Heine.

Il est clair que s'il existait une seconde position d'équilibre, n'im- rte que cet équilibre fût stable ou non, on en déduirait aussitôt un tre polynôme y qui satisfait à une équation différentielle telle que (1).

3. Dans ce qui précède nous avons supposé que les points X_1, , $\ldots$, X_n étaient renfermés dans l'intervalle $(\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1)$. Mais il est clair 'en se donnant à priori une distribution quelconque de ces points ns les p intervalles, et en limitant la variabilité de ces points par la ndition qu'ils doivent rester toujours dans les intervalles où ils se uvent d'abord, on peut répéter mot à mot les raisonnements précé- nts et il existe donc $(n \,.\, p)$ polynômes du degré n différents qui satis- t à une équation de la forme (1).

olynômes correspondants C sont aussi différents; en effet on
trement une équation de la forme (1) dont les deux intégrales
des polynômes y_1, y_2 ce qui est impossible parce qu'on en dé-
a relation absurde

$$_2 y_1' = Const.\ e^{-\int \frac{2B}{A} dx} = Const.\,(x-a_0)^{-2\alpha_0}(x-a_1)^{-2\alpha_1}\dots(x-a_p)^{-2\alpha_p}.$$

oyons maintenant aussi qu'en se donnant la distribution des
$x_1, x_2, \dots, x_n$ dans les p intervalles il y a seulement une position
re et cet équilibre correspondant au maximum du potentiel
e.

fet d'après les recherches de M. Heine le nombre des poly-
ne peut surpasser $(n\,.\,p)$.

onsidérons maintenant plus particulièrement les fonctions de
lont voici la définition d'après M. Heine.

$$\psi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_p)$$

fonction de Lamé de l'ordre p et du degré n est une fonction
lu degré n des quantités

$$A_0 = \sqrt{x-a_0},\ A_1 = \sqrt{x-a_1},\ \dots,\ A_p = \sqrt{x-a_p}$$

fait à une équation différentielle de la forme

$$\psi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\psi'(x)\frac{dy}{dx} + \Theta(x)\,y = 0$$

est un polynôme en x du degré $p-1$.
onctions se distribuent en classes de la manière suivante.
$_1(x)$ un diviseur quelconque de $\psi(x)$, alors on considère comme
ıant à la même classe toutes les fonctions qui sont de la forme

$$\sqrt{\psi_1(x)}\,V(x)$$

nt un polynôme en x. Naturellement le degré de $\psi_1(x)$ doit
même parité que n.
ation différentielle à laquelle satisfait le polynôme $V(x)$ devient

$$\psi(x)\frac{d^2V}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}\psi'(x) + \frac{\psi(x)\,\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}\right)\frac{dV}{dx} + \eta(x)\,V = 0;$$

elle est de la forme (1). En supposant réelles et inégales les quantités $a_0, a_1, \ldots, a_p$, notre proposition devient applicable; on a en effet

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}$$

en sorte que les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ n'ont d'autres valeurs que $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. Le degré de V étant k, les $(k \cdot p)$ fonctions appartenant à la même classe sont donc réelles, et les racines des diverses équations $V = 0$ se trouvent distribuées de toutes les manières possibles dans les p intervalles des racines de l'équation $\psi(x) = 0$.

On doit ce dernier théorème à M. F. Klein (Mathematische Annalen, T. XVIII). La démonstration de M. Klein n'a rien de commun avec les considérations qui précèdent, et ne s'applique pas à notre proposition plus générale.

XL.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 100, 1885, 439—440)

Sur quelques théorèmes d'algèbre.

(Note, présentée par M. Hermite.)

X_n le polynôme de Legendre; les racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $X_n = 0$ cquérir un maximum à l'expression

$$(1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)\ldots(1-\xi_n^2)\,\Pi\,(\xi_k-\xi_l)^2, \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

'on prend

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots, \quad \xi_n = x_n.$$

valeur de ce maximum est

$$\frac{2^4 \cdot 3^6 \cdot 4^8 \ldots n^{2n}}{3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \ldots (2n-1)^{2n-1}}.$$

criminant de $X_n = 0$:

$$\Pi\,(x_k - x_l)^2 = \frac{2^2 \cdot 3^4 \cdot 4^6 \ldots n^{2n-2}}{3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \ldots (2n-1)^{2n-3}}.$$

encore

$$= x^n - 1\,\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\,x^{n-2} + 1 \cdot 3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\,x^{n-4} - \ldots$$

ynôme défini par la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, U_m\, U_n\, dx = 0, \qquad (m \gtrless n);$$

ines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $U_n = 0$ font acquérir un maximum à l'ex-
on

$$e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)}\,\Pi\,(\xi_k-\xi_l)^2,$$

n prenant

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots, \quad \xi_n = x_n,$$

t la valeur de ce maximum est

$$2^2 . 3^3 . 4^4 \ldots n^n e^{-\frac{1}{2} n(n-1)}.$$

Discriminant de $U_n = 2^2 . 3^3 . 4^4 \ldots n^n$.

Parmi toutes les équations du degré n, dont les racines sont réelles t ne dépassent pas les limites ± 1, celle qui a son discriminant maxinum est $V_n = 0$, en posant

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \sum_0^\infty V_n z^n.$$

Discriminant de $V_n = \dfrac{1^1 . 2^2 . 3^3 \ldots (n-2)^{n-2} \times 2^2 . 3^3 . 4^4 \ldots n^n}{1^1 . 3^3 . 5^5 . 7^7 \ldots (2n-3)^{2n-3}}$.

Lorsque n est très grand, le rapport de ce discriminant à celui de X_n est sensiblement $\dfrac{n\pi}{2}$.

XLI.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 100, 1885, 620—622.)

Sur les polynômes de Jacobi.

(Note, présentée par M. Hermite.)

ation

$$\mathfrak{F}(-n, n+\alpha+\beta-1, \alpha, x) = 0$$

mettre sous la forme

$$x^n - \frac{n \cdot a}{1 \cdot c} x^{n-1} + \frac{n(n-1)\, a(a-1)}{1 \cdot 2 \;\; c(c-1)} x^{n-2} - \ldots = 0,$$

$\alpha + n - 1$, $c = \alpha + \beta + 2n - 2$. Nous désignerons le premier
par X ou par $\varphi(n, a, c)$.
pour $x = 0$,

$$X = (-1)^n \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{c(c-1)\ldots(c-n+1)},$$

$x = 1$,

$$X = \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{c(c-1)\ldots(c-n+1)},$$

nt $b = \beta + n - 1$, donc

$$a + b = c.$$

hangement de x en $1 - x$, l'équation (1) devient

$$x^n - \frac{n \cdot b}{1 \cdot c} x^{n-1} + \frac{n(n-1)\, b(b-1)}{1 \cdot 2 \;\; c(c-1)} x^{n-2} - \ldots = 0.$$

Soit $\frac{dX}{dx} = X_1$, et, en formant la série de Sturm,

$$\begin{aligned} X &= Q\, X_1 - X_2, \\ X_1 &= Q_1 X_2 - X_3, \\ X_2 &= Q_2 X_3 - X_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les coefficients des plus hautes puissances de x lans $X_1, X_2, X_3, \ldots$ On a alors

$$X = \varphi(n, a, c), \quad X_1 = n\,\varphi(n-1, a, c),$$

ensuite

$$a_1^2 X_2 = n^2(n-1)\frac{a\,.\,b}{c^2(c-1)}\varphi(n-2, a-1, c-2),$$

$$a_1^2 a_2^2 X_3 = n^3(n-1)^2(n-2)\frac{a^2(a-1)b^2(b-1)}{c^4(c-1)^3(c-2)^2(c-3)}(c-n)\varphi(n-3, a-2, c-4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots, a_{k-1}^2 X_k = \frac{\prod_0^{k-1}(n-r)^{k-r}(a-r)^{k-1-r}(b-r)^{k-1-r}}{\prod_0^{2k-3}(c-r)^{2k-2-r}} \times$$

$$\times \prod_0^{k-3}(c-n-r)^{k-2-r}\varphi(n-k, a-k+1, c-2k+2).$$

Ces fonctions $a_1^2 X_2$, $a_1^2 a_2^2 X_3$, ... sont précisément celles qui ont été indiquées par M. Sylvester et qui s'expriment ainsi en fonction des racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $X = 0$:

$$\Sigma(x_1 - x_2)^2(x - x_3)(x - x_4)\ldots,$$

$$\Sigma(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2(x - x_4)\ldots$$

On voit par là que les coefficients

$$n^2(n-1)\frac{ab}{c^2(c-1)}, \quad n^3(n-1)^2(n-2)\frac{a^2(a-1)b^2(b-1)}{c^4(c-1)^3(c-2)^2(c-3)}(c-n), \quad \ldots,$$

dans les seconds membres de (2), sont égaux aux déterminants

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad (s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k).$$

dernière de ces quantités n'est autre chose que le discriminant $(x_r - x_s)^2$ de l'équation $X = 0$. On trouve

$$\ldots\ldots \quad D = \prod_1^n \frac{r^r (\alpha + r - 1)^{r-1} (\beta + r - 1)^{r-1}}{(\alpha + \beta + n + r - 2)^{n+r-2}}.$$

ation $X = 0$ ne peut avoir d'autres racines multiples que 0 et 1. peut assigner sans aucune difficulté le nombre exact des racines ves de $X = 0$, celui des racines comprises entre 0 et 1, enfin des racines supérieures à 1.

sque $\alpha > 0$, $\beta > 0$, les racines sont comprises dans l'intervalle et l'on peut énoncer la propriété suivante : L'expression

$$\ldots \xi_n)^\alpha [(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \ldots (1 - \xi_n)]^\beta \Pi (\xi_r - \xi_s)^2 \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

t maximum en posant

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \ldots, \quad \xi_n = x_n.$$

st facile de calculer cette valeur maxima : on trouve

$$\prod_1^n \frac{[r][\alpha + r - 1][\beta + r - 1]}{[\alpha + \beta + n + r - 2]}$$

vant $[x]$ au lieu de x^x.

XLII.

(Ann. Sci. Éc. norm., Paris, sér. 3, 2, 1885, 93—98.)

Sur une généralisation de la série de Lagrange.

En posant

$$X = x + a\,\varphi(X),$$

série de Lagrange donne le développement d'une fonction quel-
onque de X sous la forme

$$f(X) = f(x) + \sum_{1}^{\infty} \frac{a^m}{1\,.\,2 \ldots m} \; \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} [f'(x)\,\varphi^m(x)].$$

En prenant la dérivée par rapport à x, et écrivant $f(X)$ au lieu de
(X), on a aussi

$$f(X)\,\frac{dX}{dx} = \sum_{0}^{\infty} \frac{a^m}{1\,.\,2 \ldots m} \; \frac{d^m}{dx^m} [f(x)\,\varphi^m(x)].$$

Sous cette forme, la série de Lagrange est susceptible d'une géné-
lisation élégante, donnée pour la première fois par M. Darboux
omptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXVIII).

Supposons que les r variables X, Y, Z, ... soient liées aux variables
y, z, ... en même nombre par les r équations

$$) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} X &= x + a\,\varphi(X, Y, Z, \ldots), \\ Y &= y + b\,\psi(X, Y, Z, \ldots), \\ Z &= z + c\,\chi(X, Y, Z, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

$f(X, Y, Z, \ldots)$ étant une fonction quelconque, on a le développ-
t

$$Z, \ldots) \times \Delta$$

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty \cdots \frac{a^m b^{m'} c^{m''}}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''}$$

$$\frac{d^{m+m'+m''+\cdots}[f(x,y,z,\ldots)\varphi^m(x,y,z,\ldots)\psi^{m'}(x,y,z,\ldots)\chi^{m''}(x,y,z,\ldots)\ldots]}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} & \cdots \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} & \cdots \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

rboux a donné ce développement dans le cas $r = 2$.

s la démonstration suivante, je supposerai $r = 3$, mais elle s'ap- dans le cas général.

me on le verra, le point principal consiste dans l'établissement entités

$$\ldots \begin{cases} \frac{d}{da}[\Delta f(X, Y, Z)] = \frac{d}{dx}[\Delta f(X, Y, Z)\varphi(X, Y, Z)], \\ \frac{d}{db}[\Delta f(X, Y, Z)] = \frac{d}{dy}[\Delta f(X, Y, Z)\psi(X, Y, Z)], \\ \frac{d}{dc}[\Delta f(X, Y, Z)] = \frac{d}{dz}[\Delta f(X, Y, Z)\chi(X, Y, Z)]. \end{cases}$$

ffira, d'ailleurs, de vérifier la première de ces relations, le calcul tout à fait analogue pour les deux autres.

, en développant cette relation, il vient

$$\Delta\left(f'_X \frac{dX}{da} + f'_Y \frac{dY}{da} + f'_Z \frac{dZ}{da}\right) + f\frac{d\Delta}{da}$$

$$= \varphi\,\Delta\left(f'_X \frac{dX}{dx} + f'_Y \frac{dY}{dx} + f'_Z \frac{dZ}{dx}\right) + f\frac{d(\varphi\,\Delta)}{dx},$$

sorte qu'il s'agira d'établir les formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dX}{da} &= \varphi \frac{dX}{dx}, \\ \frac{dY}{da} &= \varphi \frac{dY}{dx}, \\ \frac{dZ}{da} &= \varphi \frac{dZ}{dx} \end{aligned}\right.$$

$$\frac{d\Delta}{da} = \frac{d(\varphi\Delta)}{dx}.$$

La différentiation de la première des formules (1) donne

$$\left\{\begin{aligned} (1 - a\varphi'_X)\frac{dX}{da} &= \varphi + a\varphi'_Y \frac{dY}{da} + a\varphi'_Z \frac{dZ}{da}, \\ (1 - a\varphi'_X)\frac{dX}{dx} &= 1 + a\varphi'_Y \frac{dY}{dx} + a\varphi'_Z \frac{dZ}{dx}, \end{aligned}\right.$$

t l'on obtient de même

$$\left\{\begin{aligned} & b\psi'_X \frac{dX}{da} + (b\psi'_Y - 1)\frac{dY}{da} + b\psi'_Z \frac{dZ}{da} = 0, \\ & c\chi'_X \frac{dX}{da} + c\chi'_Y \frac{dY}{da} + (c\chi'_Z - 1)\frac{dZ}{da} = 0, \end{aligned}\right.$$

t

$$\left\{\begin{aligned} & b\psi'_X \frac{dX}{dx} + (b\psi'_Y - 1)\frac{dY}{dx} + b\psi'_Z \frac{dZ}{dx} = 0, \\ & c\chi'_X \frac{dX}{dx} + c\chi'_Y \frac{dY}{dx} + (c\chi'_Z - 1)\frac{dZ}{dx} = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Les équations (6) déterminent les rapports $\frac{dX}{da} : \frac{dY}{da} : \frac{dZ}{da}$, les quations (7) les rapports $\frac{dX}{dx} : \frac{dY}{dx} : \frac{dZ}{dx}$. Or, les coefficients dans es systèmes (6) et (7) étant les mêmes, on a

$$\frac{dX}{da} : \frac{dY}{da} : \frac{dZ}{da} = \frac{dX}{dx} : \frac{dY}{dx} : \frac{dZ}{dx}.$$

Dès lors les équations (5) mettent en évidence les relations (3).

e à vérifier la formule (4). On a

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 X}{dx\,da} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{d^2 Y}{dx\,da} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{d^2 Z}{dx\,da} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{d^2 X}{dy\,da} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{d^2 Y}{dy\,da} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{d^2 Z}{dy\,da} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{d^2 X}{dz\,da} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{d^2 Y}{dz\,da} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{d^2 Z}{dz\,da} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 \qquad + \qquad \Delta_2 \qquad + \qquad \Delta_3.$$

t à Δ_1, on a, à cause des relations (3),

$$\ldots\ldots\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}\left(\varphi\,\frac{dX}{dx}\right) & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{d}{dx}\left(\varphi\,\frac{dY}{dx}\right) & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{d}{dx}\left(\varphi\,\frac{dZ}{dx}\right) & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}.$$

nt ensuite

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\,\frac{dX}{dx}\right) & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\,\frac{dY}{dx}\right) & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{d}{dy}\left(\varphi\,\frac{dZ}{dx}\right) & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \varphi\,\frac{d^2 X}{dy\,dx} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \varphi\,\frac{d^2 Y}{dy\,dx} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \varphi\,\frac{d^2 Z}{dy\,dx} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \varphi\,\frac{dX}{dx} & \frac{d^2 X}{dy\,dx} & \frac{dX}{dz} \\ \varphi\,\frac{dY}{dx} & \frac{d^2 Y}{dy\,dx} & \frac{dY}{dz} \\ \varphi\,\frac{dZ}{dx} & \frac{d^2 Z}{dy\,dx} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix},$$

ême

$$\ldots\ldots\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \varphi\,\frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{d^2 X}{dz\,dx} \\ \varphi\,\frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{d^2 Y}{dz\,dx} \\ \varphi\,\frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{d^2 Z}{dz\,dx} \end{vmatrix}.$$

Les équations (8), (9) et (10) donnent de suite

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = \frac{d\,\Delta}{d\,a} = \frac{d\,(\varphi\,\Delta)}{d\,x},$$

est-à-dire la formule (4).

La première des équations (2) est ainsi établie parfaitement, les eux autres s'obtiennent de la même manière.

Par une application répétée de ces relations, on trouve de suite

$$(11)\ .\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{m+m'+m''}[\Delta f(X, Y, Z)]}{d\,a^m\,d\,b^{m'}\,d\,c^{m''}} \\ &\quad = \frac{d^{m+m'+m''}[\Delta f(X,Y,Z)\,\varphi^m(X,Y,Z)\,\psi^{m'}(X,Y,Z)\,\chi^{m''}(X,Y,Z)]}{d\,x^m\,d\,y^{m'}\,d\,z^{m''}}. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir le coefficient de $\frac{a^m\,b^{m'}\,c^{m''}}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''}$ dans le éveloppement de $\Delta f(X, Y, Z)$, il suffit de supposer $a = b = c = 0$, dans ette formule (11). Or, dans cette supposition, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{d\,X}{d\,x} = 1, \quad \frac{d\,X}{d\,y} = 0, \quad \frac{d\,X}{d\,z} = 0, \\ &\frac{d\,Y}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,Y}{d\,y} = 1, \quad \frac{d\,Y}{d\,z} = 0, \\ &\frac{d\,Z}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,Z}{d\,y} = 0, \quad \frac{d\,Z}{d\,z} = 1, \end{aligned}$$

onc $\Delta = 1$; de plus $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, en sorte que ce coefficient égal à

$$\frac{d^{m+m'+m''}[f(x, y, z)\,\varphi^m(x, y, z)\,\psi^{m'}(x, y, z)\,\chi^{m''}(x, y, z)]}{d\,x^m\,d\,y^{m'}\,d\,z^{m''}},$$

mme nous l'avons annoncé.

Je terminerai par la remarque suivante. Dans le Tome 54 du Journal Crelle, M. Heine a déduit la formule de Lagrange à l'aide du calcul s variations. Cette démonstration peut être généralisée facilement, manière à obtenir la formule que nous venons de démontrer, le

ninant fonctionnel Δ s'introduisant alors de la manière la plus elle. Mais les formules (2) et la formule (11) qui s'en déduit diatement paraissent assez remarquables en elles-mêmes : c'est ce ous a fait préférer la méthode plus élémentaire que nous venons velopper.

XLIII.

(Bull. Sci. math., Paris, sér. 2, 9, 1885, 306—311.)

Sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$.

1. Nous nous proposons d'obtenir le développement de cette inté-
rale suivant les puissances descendantes de a, développement qui
eut servir utilement pour le calcul numérique dans le cas où le nombre
ositif a est très grand et que b ne l'est pas.

La méthode qui se présente d'abord pour cet objet est la suivante.
oit

$$P = 1 : \left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b},$$

ors

$$\log P = -(a+b)\left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2\,a^2} + \frac{x^3}{3\,a^3} - \dots\right)$$

ı bien

$$\log P = -x + \frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \frac{A_3}{a^3} + \dots,$$

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\,x^2 - b\,x,$$
$$A_2 = \tfrac{1}{3}\,x^3 + \tfrac{1}{2}\,b\,x^2,$$
$$A_3 = \tfrac{1}{4}\,x^4 - \tfrac{1}{3}\,b\,x^3,$$
$$\dots\dots\dots$$

Il s'ensuit

$$P = e^{-x} \times e^{\frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \frac{A_3}{a^3} + \dots},$$

$$P = e^{-x}\left(1 + \frac{B_1}{a} + \frac{B_2}{a^2} + \frac{B_3}{a^3} + \dots\right),$$

sant

$$B_1 = A_1,$$
$$B_2 = A_2 + \tfrac{1}{2} A_1^2,$$
$$B_3 = A_3 + A_1 A_2 + \tfrac{1}{6} A_1^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ntégrale proposée se met maintenant sous la forme

$$\int_0^\infty \left(1 + \frac{B_1}{a} + \frac{B_2}{a^2} + \frac{B_3}{a^3} + \ldots\right) e^{-2x}\,dx,$$

ne reste plus qu'à effectuer les intégrations à l'aide de la formule

$$\int_0^\infty x^k e^{-2x}\,dx = \frac{\Pi(k)}{2^{k+1}}.$$

obtient ainsi, pour les premiers termes,

$$\tfrac{1}{2} + \frac{-2b+1}{8a} + \frac{4b^2 - 2b - 1}{32a^2} + \frac{-8b^3 + 10b - 1}{128a^3} + \cdots$$

is, comme on le voit, cette méthode ne donne aucune lumière sur te qu'il faut ajouter à un nombre fini de termes du développe- pour obtenir la valeur exacte de l'intégrale et, de plus, elle de- rait très pénible si l'on voulait pousser plus loin des calculs.

Nous allons développer maintenant une autre méthode qui ne nte pas ces défauts.

trouve, par la différentiation,

$$\frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = -\frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{k x^{k-1} e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} - \frac{a+b}{a}\,\frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

on peut mettre sous la forme

$$\frac{x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = -\frac{2x^k e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{k x^{k-1} e^{-x}}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{x^k (x-b) e^{-x}}{a\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

en conclut, lorsque $k > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{x^k e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = \frac{k}{2}\int_0^\infty \frac{x^{k-1} e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} + \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{x^k (x-b) e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

pour $k=0$

$$\ldots\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}=\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

En écrivant dans la formule (1) successivement $k-1, k-2, \ldots$ au lieu de k, on trouvera par une combinaison bien facile de ces équations avec la formule (2)

$$\int_0^\infty \frac{x^k e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}=\frac{\Pi(k)}{2^{k+1}}+\frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b)\,\mathrm{T}_k(x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

$$\mathrm{T}_k(x)=x^k+\frac{k}{2}\,x^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2\,.\,2}\,x^{k-2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{2\,.\,2\,.\,2}\,x^{k-3}+\ldots$$

Il importe de remarquer que la valeur de $\mathrm{T}_k(x)$ pour $x=0$ est $\Pi(k):2^k$, en sorte qu'on peut écrire

$$\int_0^\infty \frac{x^k e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{T}_k(0)+\frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b)\,\mathrm{T}_k(x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

Soit maintenant $f(x)$ un polynôme quelconque de x, on aura évidemment

$$\int_0^\infty \frac{f(x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}=\tfrac{1}{2}\,\overline{f(0)}+\frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b)\,\overline{f(x)}\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+1}},$$

en désignant symboliquement par $\overline{f(x)}$ le polynôme obtenu en remplaçant les diverses puissances $x, x^2, x^3, \ldots$ dans $f(x)$ par $\mathrm{T}_1(x)$, $\mathrm{T}_2(x)$, $\mathrm{T}_3(x), \ldots$

En écrivant $b+n$ au lieu de b, nous avons

$$\ldots\quad \int_0^\infty \frac{f(x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}}=\tfrac{1}{2}\,\overline{f(0)}+\frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{(x-b-n)\,\overline{f(x)}\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n+1}}$$

. Nous allons appliquer cette formule dans le cas particulier $f(x)=(b-x)^k$; alors il viendra

$$\overline{f(x)}=b^k-\frac{k}{1}\,b^{k-1}(x+\tfrac{1}{2})+\frac{k(k-1)}{1\,.\,2}\,b^{k-2}(x^2+x+\tfrac{1}{2})-$$

$$-\frac{k(k-1)(k-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,b^{k-3}(x^3+\tfrac{3}{2}x^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{4})+\cdots$$

en

$$f(x) = (b-x)^k - \frac{k}{2}(b-x)^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2}(b-x)^{k-2} - \dots$$

posant donc

$$U_k(b) = b^k - \frac{k}{2} b^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2} b^{k-2} - \dots,$$

nt

$$\frac{(b-x)^k e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} = \tfrac{1}{2} U_k(b) + \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} \frac{(x-b-n)\,U_k(b-x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n+1}}.$$

là il suit immédiatement qu'en supposant

$$V(b) = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \dots + c_k b^k,$$

ra

$$\frac{V(b-x)\,e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} = \tfrac{1}{2}\,[V(b)] + \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} \frac{(x-b-n)[V(b-x)]e^{-x}dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n+1}},$$

signant par $[V(b)]$ le polynôme obtenu en remplaçant dans b par $U_1(b)$, b^2 par $U_2(b)$, b^3 par $U_3(b)$, ..., tandis que naturelt, $[V(b-x)]$ s'obtient en écrivant $b-x$ au lieu de b dans $[V(b)]$. qui précède suppose, bien entendu, que les coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots$ nferment point b. Si cela avait lieu, il faudrait d'abord écrire B u de b dans ces coefficients, opérer ensuite comme il vient d'être é et rétablir enfin de nouveau b au lieu de B. Ainsi la valeur de x) dans le premier membre de (4) est égale à

$$c_0 + c_1(b-x) + c_2(b-x)^2 + \dots + c_k(b-x)^k,$$

ne faut pas substituer $b-x$ à la place de b dans les coefficients $c_2, \dots, c_k$.

Revenons maintenant à la formule (2), que nous écrivons ainsi

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}} = V_0(b) + \frac{R_1}{a},$$

en posant

$$V_0(b) = \tfrac{1}{2}, \quad R_1 = \int_0^\infty \frac{(x-b)\, V_0(b-x)\, e^{-x}\, dx}{\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{a+b+1}}.$$

Quant à l'expression R_1, nous pouvons la transformer à l'aide de la formule (4), où il faut prendre $V(b) = -b\, V_0(b)$, $n = 1$. Il vient

$$R_1 = V_1(b) + \frac{R_2}{a},$$

en posant

$$V_1(b) = -\tfrac{1}{2}[b\, V_0(b)], \quad R_2 = \int_0^\infty \frac{(x-b-1)\, V_1(b-x)\, e^{-x}\, dx}{\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{a+b+2}}.$$

Cette expression R_2 peut, de nouveau, se transformer à l'aide de (4) en prenant $V(b) = -(b+1)\, V_1(b)$ et $n = 2$. Il vient

$$R_2 = V_2(b) + \frac{R_3}{a},$$

en posant

$$V_2(b) = -\tfrac{1}{2}[(b+1)\, V_1(b)], \quad R_3 = \int_0^\infty \frac{(x-b-2)\, V_2(b-x)\, e^{-x}\, dx}{\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{a+b+3}}.$$

Il est évident qu'on peut continuer ainsi et l'on trouve le résultat suivant:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\, dx}{\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^{a+b}} = V_0(b) + \frac{V_1(b)}{a} + \frac{V_2(b)}{a^2} + \dots + \frac{V_{n-1}(b)}{a^{n-1}} + \frac{R_n}{a^n}.$$

Ici les polynômes $V_0(b)$, $V_1(b)$, $V_2(b)$, ... se calculent de proche en proche par les relations

$$\begin{aligned}
V_0(b) &= \tfrac{1}{2}, \\
V_1(b) &= -\tfrac{1}{2}[b\, V_0(b)], \\
V_2(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+1)\, V_1(b)], \\
V_3(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+2)\, V_2(b)], \\
V_4(b) &= -\tfrac{1}{2}[(b+3)\, V_3(b)], \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

is rappelons que $[f(b)]$ s'obtient en ordonnant $f(b)$ suivant les nces de b et en remplaçant alors b^k par

$$b^k - \frac{k}{2} b^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2.2} b^{k-2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{2.2.2} b^{k-3} + \ldots$$

uite le reste $R_n : a^n$ s'exprime à l'aide du polynôme $V_{n-1}(b)$ ainsi:

$$R_n : a^n = \int_0^\infty \frac{(x-b-n+1) V_{n-1}(b-x) e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b+n}} : a^n.$$

eut remarquer que $V_n(b)$ est la valeur de R_n pour $a = \infty$: donc

$$V_n(b) = \int_0^\infty (x-b-n+1) V_{n-1}(b-x) e^{-2x} dx;$$

la revient, comme il est facile de le voir, à l'expression

$$V_n(b) = -\tfrac{1}{2} [(b+n-1) V_{n-1}(b)].$$

trouve sans difficulté :

$= +\frac{1}{2},$

$= -\frac{1}{4} b + \frac{1}{8},$

$= +\frac{1}{8} b^2 - \frac{1}{16} b - \frac{1}{32},$

$= -\frac{1}{16} b^3 + \frac{5}{64} b - \frac{1}{128},$

$= +\frac{1}{32} b^4 - \frac{1}{32} b^3 - \frac{11}{128} b^2 - \frac{7}{256} b + \frac{13}{512},$

$= -\frac{1}{64} b^5 - \frac{1}{128} b^4 + \frac{31}{256} b^3 + \frac{1}{256} b^2 + \frac{39}{1024} b - \frac{143}{2048},$

$= +\frac{1}{128} b^6 + \frac{31}{1024} b^5 - \frac{239}{2048} b^4 - \frac{73}{1024} b^3 + \frac{5}{64} b^2 - \frac{567}{4096} b + \frac{1997}{8192}.$

. . . .

re premier calcul se trouve vérifié ainsi ; nous avons obtenu de reste de la série sous forme finie.

XLIV.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 101, 1885, 153—154.)

Sur une fonction uniforme.

(Note présentée par M. Hermite.)

Le caractère analytique de la fonction $\zeta(z)$, qui est définie pour les leurs de z dont la partie réelle surpasse l'unité par la série

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\ldots,$$

été complètement dévoilé par Riemann qui a montré que

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$$

: holomorphe dans tout le plan.

Les zéros de la fonction $\zeta(z)$ sont d'abord

$$-2,\ -4,\ -6,\ -8,\ \ldots;$$

y en a, en outre, une infinité d'autres, qui sont tous imaginaires, la rtie réelle restant comprise entre 0 et 1.

Riemann a annoncé comme très probable que toutes ces racines imaaires sont de la forme $\frac{1}{2}+ai$, a étant réel.

Je suis parvenu à mettre cette proposition hors de doute par une dénstration rigoureuse. Je vais indiquer la voie qui m'a conduit à ce sultat.

D'après une remarque due à Euler,

$$1:\zeta(z)=\Pi\left(1-\frac{1}{p^z}\right),$$

représentant tous les nombres premiers, ou encore

$$1:\zeta(z)=1-\frac{1}{2^z}-\frac{1}{3^z}-\frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}-\frac{1}{7^z}+\frac{1}{10^z}-\ldots.$$

étude plus approfondie de la série qui figure ici dans le second qui conduit au but désiré. On peut démontrer, en effet, que rie est convergente et définit une fonction analytique tant que réelle de z surpasse $\frac{1}{2}$.

évident, d'après cela, que $\zeta(z)$ ne s'évanouit pour aucune va- z dont la partie réelle surpasse $\frac{1}{2}$. Mais l'équation $\zeta(z)=0$ ne nettre non plus des racines imaginaires dont la partie réelle est re à $\frac{1}{2}$. En effet, en admettant l'existence d'une telle racine $z=z_1$, it aussi $\zeta(1-z_1)=0$, comme le montre la relation entre $\zeta(z)$ et établie par Riemann. Or, la partie réelle de $1-z_1$ est supé- $\frac{1}{2}$.

onséquent, toutes les racines imaginaires de $\zeta(z)=0$ sont de $\frac{1}{2}+ai$, a étant réel.

XLV.

(Paris, C.-R. Acad. Sci., 101, 1885, 368—370).

Sur une loi asymptotique dans la théorie des nombres.

(Note présentée par M. Hermite.)

Le théorème énoncé dans les Comptes rendus, p. 153, que la série

$$) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \ldots,$$

tenue par le développement du produit infini $\Pi\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$, est conver-
nte pour $s > \frac{1}{2}$, conduit à une conséquence importante relative à la
ıction de M. Tchebychef $\Theta(x) =$ somme des logarithmes des nom-
es premiers qui ne surpassent pas x.

En désignant par $f(n)$ le nombre des diviseurs de n, je rappelle ce
ultat dû à Dirichlet, que

$$\frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n) - n \log n + (2\,C - 1)\,n}{\sqrt{n}}$$

te comprise entre deux limites finies, C étant la constante eulérienne.

On en conclut facilement que la série

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \sum_1^\infty \frac{f(n) - \log n - 2\,C}{n^s}$$

convergente pour $s > \frac{1}{2}$.

Voici maintenant deux théorèmes relatifs aux séries de la forme

$\frac{\lambda'(n)}{n^s}$ qui nous sont nécessaires:

éorème I. — Lorsque la série $\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s}$, où $s > 0$, est convergente,

$$\lim \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \ldots + \lambda(n)}{n^s} = 0 \qquad (n = \infty).$$

éorème II. — Lorsque les deux séries

$$\sum_1^\infty \frac{\lambda(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s}$$

convergentes pour $s = \alpha > 0$ et que les séries

$$\sum_1^\infty \frac{|\lambda(n)|}{n^s}, \ \sum_1^\infty \frac{|\mu(n)|}{n^s}$$

convergentes pour $s = \alpha + \beta$, alors la série obtenue en multipliant ux premières

$$\sum_1^\infty \frac{\nu(n)}{n^s},$$

$$\nu(n) = \sum \lambda(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

ésentant tous les diviseurs de n, est convergente pour $s = \alpha + \frac{1}{2}\beta$. remplaçant, dans les séries (A) et (B), chaque terme par sa valeur ue, les nouvelles séries convergent pour $s > 1$. En multipliant les séries (A) et (B), la série obtenue sera convergente pour $s > \frac{3}{4}$, s le théorème II.

on obtient ainsi

$$\sum_1^\infty \frac{1 - g(n)}{n^s},$$

$$g(1) = 2\,C,$$

rsque p est premier, $g(p^k) = \log p$, tandis que $g(n) = 0$ lorsque n pas de la forme p^k. On en conclut, d'après le théorème I,

$$\lim \frac{n - g(1) - g(2) - \ldots - g(n)}{n^s} = 0 \qquad (n = \infty, \quad s > \tfrac{3}{4});$$

mais on voit facilement que

$$g(1)+g(2)+\ldots+g(n)=2\,C+\Theta(n)+\Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)+\Theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right)+\ldots$$

en sorte que, en posant

$$\Theta(n)+\Theta\left(n^{\frac{1}{2}}\right)+\Theta\left(n^{\frac{1}{3}}\right)+\ldots=n+A_n n^s.$$

on trouve

$$\lim A_n=0 \quad \text{pour} \quad n=\infty.$$

Il est facile d'en déduire qu'on a aussi

$$\Theta(n)=n+B_n n^s,$$

où

$$\lim B_n=0$$

dès que $s>\frac{3}{4}$.

Ce résultat conduit à cette conséquence que, quelque petit que soit un nombre positif h, le nombre des nombres premiers compris entre

$$n \quad \text{et} \quad (1+h)\,n$$

finit toujours par croître au delà de toute limite, quand n croît indéfiniment.

XLVI.

(…terdam, Versl. K. Akad. Wet., Afd. Nat., sér. 3, 2, 1886, 101—104)

…r quelques formules qui se rapportent à la théorie des fonctions elliptiques.

…ns les formules qui suivent on doit toujours, sauf indication con… , attribuer au nombre n placé sous le signe Σ les valeurs entières …itives

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

…nbre m désignera les nombres impairs

$$m = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

…suite D représente un nombre entier positif ou négatif, mais je …se toujours que D n'est divisible par aucun carré hors l'unité. …listingue quatre cas.

I.

…> 0, $D \equiv 2,\ 3 \bmod 4$. En posant

$$\ldots\ldots \quad F(x) = \sum \left(\frac{D}{m}\right) e^{-\frac{m^2 \pi x}{4D}}$$

…fonction jouit de ces propriétés:

$$\ldots\ldots \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\, F(x),$$

$$\ldots\ldots \quad F(x + Di) = e^{-\frac{\pi i}{4}} F(x),$$

…est le symbole de Legendre, généralisé par Jacobi, avec la con…

…n ordinaire que $\left(\frac{D}{m}\right) = 0$, lorsque D et m ne sont pas premiers

tre eux. J'ajoute que, dans ce qui suit, on suppose encore $\left(\frac{r}{n}\right)=\left(\frac{r}{-n}\right)$.
oir p. e. Kronecker, Berliner Monatsberichte, Juni 1876).

II.

$D<0$, $D\equiv 2$, $3 \bmod 4$. En posant

$$G(x)=\sum\left(\frac{D}{m}\right) m\, e^{\frac{m^2\pi x}{4D}}$$

aura

$$G\left(\frac{1}{x}\right)=(\sqrt{x})^3\, G(x),$$

$$G(x-Di)=e^{-\frac{\pi i}{4}}\, G(x).$$

III.

$D>0$, $D\equiv 1 \bmod 4$. En posant

$$\begin{cases} F_1(x)=\sum\left(\frac{n}{D}\right) e^{-\frac{n^2\pi x}{D}}, \\ F_2(x)=\sum(-1)^n\left(\frac{n}{D}\right) e^{-\frac{n^2\pi x}{D}}, \\ F_3(x)=\sum\left(\frac{m}{D}\right) e^{-\frac{m^2\pi x}{4D}}, \end{cases}$$

aura

$$\begin{cases} F_1\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}\, F_1(x), \\ F_2\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^{\frac{D-1}{4}}\sqrt{x}\, F_3(x), \\ F_3\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^{\frac{D-1}{4}}\sqrt{x}\, F_2(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(x+Di)=F_2(x), \\ F_2(x+Di)=F_1(x), \\ F_3(x+Di)=e^{-\frac{\pi i}{4}}\, F_3(x). \end{cases}$$

fois, ces formules sont en défaut dans le cas $D=1$, mais en dans ce cas au lieu de (γ)

$$F_1(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x},$$

$$F_2(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi x},$$

$$F_3(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2\pi x}{4}},$$

ions (γ') et (γ'') restent vraies.

IV

, $D\equiv 1 \bmod 4$. En posant

$$\ldots\ldots \begin{cases} G_1(x)=\sum \left(\frac{n}{D}\right) n\, e^{-\frac{n^2\pi x}{D}}, \\ G_2(x)=\sum (-1)^n \left(\frac{n}{D}\right) n\, e^{-\frac{n^2\pi x}{D}}, \\ 2\,G_3(x)=\sum \left(\frac{m}{D}\right) m\, e^{-\frac{m^2\pi x}{D}}, \end{cases}$$

$$\ldots\ldots \begin{cases} G_1\left(\frac{1}{x}\right)=(\sqrt{x})^3\, G_1(x), \\ G_2\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^{\frac{D-1}{4}}(\sqrt{x})^3\, G_3(x), \\ G_3\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^{\frac{D-1}{4}}(\sqrt{x})^3\, G_2(x), \end{cases}$$

$$\ldots\ldots \begin{cases} G_1(x-D\,i)=G_2(x), \\ G_2(x-D\,i)=G_1(x), \\ G_3(x-D\,i)=e^{-\frac{\pi i}{4}}\, G_3(x). \end{cases}$$

ut on doit supposer positive la partie réelle de x et de $\sqrt{x}$.

On voit bien les conséquences qui se rattachent à ces formules et ır lesquelles j'aurai peut-être l'occasion de revenir plus tard.

Pour le moment je me borne à cette indication que toutes ces for-ules se déduisent sans peine à l'aide des propriétés fondamentales de fonction Θ d'une part et d'autre part des formules que Gauss à ɔnnées dans son célèbre mémoire intitulé: Summatio quarumdam se-rum singularium, 1808. Oeuvres, tome II.

XLVII.

dam, Versl. K. Akad. Wet., Afd. Nat., sér. 3, 2, 1886, 210—216.)

Sur quelques intégrales définies.

dre dans les Exercices de calcul intégral (t. II, p. 189) a donné
de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin m x}{e^{2\pi x}-1}\, dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^m+1}{e^m-1} - \frac{1}{2m}$$

ur laquelle Abel est revenu plus d'une fois (Oeuvres, tome I,
Édition de Sylow et Lie).

e du mémoire de Riemann: „Ueber die Anzahl der Prim-
ter einer gegebenen Grenze" m'a conduit à cette remarque
it regarder la formule de Legendre comme le cas le plus
e toute une série de formules qui présentent un caractère
ent arithmétique.

ce qui suit je me bornerai à donner deux exemples qui feront
suffisamment le caractère des formules nouvelles, sans en
résenter dès à présent, le système complet.

un nombre entier positif impair ($p > 1$) sans diviseur carré
s

$$f(x) = \sum_1^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) x^n$$

le $\left(\frac{n}{p}\right)$ étant pris dans le même sens que dans ma communi-
Septembre 1885 (pag. 101 de ce volume).

Cela posé, on a lorsque

$$p \equiv 1 \mod 4$$

$$\text{(A)} \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} \sin\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right) d\,x = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \cdot \frac{f(e^{-t})}{1 - e^{-pt}}.$$

En supposant au contraire

$$p \equiv 3 \mod 4$$

on a

$$\text{(B)} \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} \cos\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right) d\,x = \frac{\pi}{\sqrt{p}} \cdot \frac{f(e^{-t})}{1 - e^{-pt}}.$$

Dans ces formules (A) et (B) la racine $\sqrt{p}$ doit être prise positivement, et cette détermination du signe correspond précisément à celle que Gauss a donnée dans le mémoire Summatio etc, Oeuvres, tome II

C'est par le développement en série de l'expression

$$\frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}}$$

que j'ai obtenu ces résultats

En posant pour abréger

$$\varphi\,(s) = \sum_1^\infty \left(\frac{n}{p}\right) \frac{1}{n^s}$$

j'obtiens

$$\text{(C)} \quad . \quad . \quad . \quad \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} = \frac{\sqrt{p}}{\pi} \left\{ \varphi\,(2) \frac{p\,x}{2\,\pi} - \varphi\,(4) \frac{p^3\,x^3}{2^3\,\pi^3} + \varphi\,(6) \frac{p^5\,x^5}{2^5\,\pi^5} - \cdots \right\}$$

lorsque $p \equiv 1 \mod 4$,

$$\text{(D)} \quad . \quad . \quad . \quad \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} = \frac{\sqrt{p}}{\pi} \left\{ \varphi\,(1) - \varphi\,(3) \frac{p^2\,x^2}{2^2\,\pi^2} + \varphi\,(5) \frac{p^4\,x^4}{2^4\,\pi^4} - \cdots \right\}$$

lorsque $p \equiv 3 \mod 4$.

Voici comment ces formules conduisent aux intégrales (A) et (B).

J'observe d'abord que la formule connue

$$\frac{\Gamma\,(s)}{n^s} = \int_0^\infty x^{s-1}\,e^{-nx}\,d\,x$$

ussitôt à l'expression suivante de la fonction $\varphi(s)$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad \varphi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} x^{s-1}\, dx.$$

lérant maintenant l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1 - e^{-px}} \sin\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right) d\,x$$

ı développer l'expression $\sin\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right)$ suivant les puissances de x

$$\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right) = \frac{1}{\Gamma(2)}\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right) - \frac{1}{\Gamma(4)}\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right)^3 + \frac{1}{\Gamma(6)}\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right)^5 - \ldots$$

servant alors de la formule (1), l'intégrale se trouve égale à

$$\varphi(2)\left(\frac{p\,t}{2\,\pi}\right) - \varphi(4)\left(\frac{p\,t}{2\,\pi}\right)^3 + \varphi(6)\left(\frac{p\,t}{2\,\pi}\right)^5 - \ldots$$

: sommer par la formule (C), ce qui fournit la formule (A). e (B) s'obtient de la même manière à l'aide du développe-

onstration qu'on vient de donner, ne s'applique directement leurs de t qui satisfont à la condition

$$\mathrm{mod}\,(p\,t) < 2\,\pi$$

s avoir reconnu ainsi l'exactitude des formules (A) et (B) pour s de t dont le module est inférieur à $\frac{2\,\pi}{p}$, on verra facilement rmules sont valables pour une valeur imaginaire quelconque $-b\,i$, à condition seulement que la valeur absolue de b reste à $\frac{2\,\pi}{p}$.

e par laquelle nous avons défini la fonction $\varphi(s)$ n'est con- que tant que la partie réelle de s est positive. Toutefois on ontrer que cette fonction est holomorphe dans tout le plan; ve, en partant de la formule (1) et en suivant une méthode ır M. Hermite. (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, p. 112).

Il existe une relation remarquable qui lie $\varphi(s)$ à $\varphi(1-s)$ et qui a : découverte par M. Hurwitz (Zeitschrift für Mathematik und Physik, ne 27, 1882). Sans avoir eu connaissance du travail de M. Hurwitz, vais retrouvé son résultat en partant des formules (A) et (B). Comme te démonstration est entièrement différente de celle de M. Hurwitz, crois utile de la donner ici. Je me bornerai d'ailleurs au cas $\equiv 1 \bmod 4$.

En multipliant (A) par $t^{s-1}\,dt$, intégrant de 0 à ∞ il vient, si l'on iverse l'ordre des intégrations dans l'intégrale double et qu'on se ppelle la relation connue:

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{p\,t\,x}{2\,\pi}\right) t^{s-1}\,d\,t = \Gamma(s)\left(\frac{p\,x}{2\,\pi}\right)^{-s} \sin\frac{\pi\,s}{2},$$

$$\Gamma(s)\sin\frac{\pi\,s}{p}\left(\frac{p}{2\,\pi}\right)^{-s}\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-p\,x}}\,x^{-s}\,d\,x = \frac{\pi}{\sqrt{p}}\int_0^\infty \frac{f(e^{-t})}{1-e^{-p\,t}}\,t^{s-1}\,d\,t.$$

Or d'après (1)

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-x})}{1-e^{-p\,x}}\,x^{-s}\,d\,x = \Gamma(1-s)\,\varphi(1-s),$$

$$\int_0^\infty \frac{f(e^{-t})}{1-e^{-p\,t}}\,t^{s-1}\,dt = \Gamma(s)\,\varphi(s),$$

sorte qu'on trouve, après quelques réductions:

$$\varphi(1-s) = \left(\frac{p}{2\,\pi}\right)^s \frac{2\cos\frac{\pi\,s}{2}}{\sqrt{p}}\,\Gamma(s)\,\varphi(s).$$

On peut dire aussi que l'expression

$$\left(\frac{p}{\pi}\right)^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\varphi(s)$$

change pas en remplaçant s par $1-s$.

l faut supposer dans cette démonstration que s (ou la partie réelle s) reste comprise entre 0 et 1. Mais d'après le caractère analytique la fonction $\varphi(s)$, la relation obtenue entre $\varphi(s)$ et $\varphi(1-s)$ doit avoir dans tout le plan, dès qu'elle se trouve vérifiée dans une partie plan.

remarque enfin que les formules que j'ai données dans ma comation déjà citée de Septembre 1885, permettent d'établir d'une re beaucoup plus simple encore cette relation entre $\varphi(s)$ et $\varphi(1-s)$. nann, dans le mémoire cité, a donné une relation entre la fonc-ı'il désigne par $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$, et il a démontré cette propriété x manières différentes, la seconde démonstration se fondant sur rmule qui appartient à la théorie des fonctions elliptiques. La stration de la relation qui lie $\varphi(s)$ à $\varphi(1-s)$ que nous venons ıuer en dernier lieu, est parfaitement analogue à cette seconde stration de Riemann.

est pas sans intérêt d'examiner un peu plus particulièrement les ppements en série (C) et (D).

st évident d'abord que les coefficients des diverses puissances ans le développement de

$$\frac{f(e^{-x})}{1-e^{-px}}=\frac{e^{\frac{p}{2}x}f(e^{-x})}{e^{\frac{p}{2}x}-e^{-\frac{p}{2}x}}$$

es nombres rationnels; en égalant ces nombres aux expressions urent dans les seconds membres de (C) et de (D) on obtient les s des séries infinies $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, etc. Ces sommations me nt devoir être mises à côté des formules bien connues qui ex- les sommes des séries

$$\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\dots,$$

$$\frac{1}{1^{2n-1}}-\frac{1}{3^{2n-1}}+\frac{1}{5^{2n-1}}-\frac{1}{7^{2n-1}}+\dots$$

$$e^{\frac{p}{2}x}f(e^{-x})=\sum_{1}^{p-1}\left(\frac{n}{p}\right)e^{\frac{p-2n}{2}x}.$$

inguant les deux cas $p\equiv 1$, $p\equiv 3 \bmod 4$ et en posant $p'=\frac{p-1}{2}$

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \ldots \qquad p \equiv 1 \bmod 4,$$

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right) \ldots \qquad p \equiv 3 \bmod 4,$$

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right)\left[1 - \frac{1}{1.2}\left(\frac{p-2n}{2}\right)^2 x^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{p-2n}{2}\right)^4 x^4 + \ldots\right]$$

$$\ldots \frac{p}{2} \ldots + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{p}{2}\right)^3 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{p}{2}\right)^5 x^5 + \ldots$$

$$p \equiv 1 \bmod 4$$

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right)\left[\frac{p-2n}{2}\,x + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{p-2n}{2}\right)^3 x^3 + \ldots\right]$$

$$\ldots \frac{p}{2} \ldots + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{p}{2}\right)^3 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}\left(\frac{p}{2}\right)^5 x^5 + \ldots$$

$$p \equiv 3 \bmod 4$$

La comparaison avec les développements (C) et (D) donne une série de formules dont les premières et les plus simples peuvent s'écrire

$$\frac{1}{2p}\sum \left(\frac{n}{p}\right) n^2 \ldots \frac{p\sqrt{p}}{2\pi^2}\, \ldots \qquad p \equiv 1 \bmod 4,$$

$$\frac{1}{p}\sum \left(\frac{n}{p}\right) n \ldots \frac{\sqrt{p}}{\pi}\, \ldots \qquad p \equiv 3 \bmod 4,$$

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} \ldots \frac{\pi^2}{p\sqrt{p}}\sum \left(\frac{n}{p}\right) n^2 \qquad p \equiv 1 \bmod 4,$$

$$\sum \left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n} \ldots \frac{\pi}{p\sqrt{p}}\sum \left(\frac{n}{p}\right) n \qquad p \equiv 3 \bmod 4.$$

La formule ... s'est présentée déjà à Dirichlet dans ces célèbres recherches sur la détermination du nombre des classes des formes quadratiques à deux indéterminées, le cas le plus simple $p = 3$

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

se trouve dans l'Introductio in Analysin infinitorum d'Euler (§ 176).